samedi 9 octobre 2021

Devoir surveillé n°2 CS

Exercice 1

On considère la série numérique de terme général $\dfrac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n>0)$.

1. Justifier que cette série est une série convergente.
2. Déterminer trois réels α, β et γ tels que pour pour tout entier $n>0$, on ait :

$$\frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}.$$

3. En déduire la somme de la série.

Exercice 2

On pose $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Pour $x \in]-R;R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
3. Montrer que la fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en $-R$ et déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Exercice 3

On considère la série entière $f(x)$ de terme général $\dfrac{n^2-2n+3}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est $R=+\infty$.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4

On considère l'application définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\varphi(P) = (1+X)P' - 2P.$$

1. Montrer que φ est est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire une base du noyau puis de l'image de φ.
4. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$.
3. **a.** Démontrer que $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   b. En déduire par récurrence que : $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$.
4. Démontrer que : $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right)$.