Chapitre 5 : Variables aléatoires finies

1 Rappels sur les variables aléatoires finies

1.1 Espérance, Variance

Définition 1 : espérance

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω par la donnée de la suite $(x_i, p_i)_{i=1\dots n}$.
On appelle espérance de la variable aléatoire X le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

On dit que la variable aléatoire réelle X est centrée si $E(X) = 0$.

Propriété 1 : propriétés de l'espérance

- Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (on dit que l'espérance est linéaire).

Définition 2 : variance et écart-type

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω par la donnée de la suite $(x_i, p_i)_{i=1\dots n}$.

1. On appelle variance de X le réel $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

2. On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X}.$$

3. On dit que la variable aléatoire X est réduite si $V(X) = 1$.

Remarque
La variance de X est un indicateur de dispersion autour de l'espérance de X. La variance augmente lorsque la variable aléatoire se disperse autour de son espérance.

Propriété 2 : théorème de Koenig-Huygens

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Alors :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Propriété 3 : variance de l'image d'une variable aléatoire réelle

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

1.2 Lois usuelles

1.2.1 Loi uniforme

Définition 3 : loi uniforme

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
Cette loi est notée $\mathscr{U}(n)$.

Propriété 4 : espérance et variance de la loi uniforme

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

1.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 4 : loi de Bernoulli

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Soit $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si on a $p(X = 1) = p$.
Cette loi est notée $\mathscr{B}(p)$.

Remarque :
Cette loi est celle de toute expérience aléatoire qui comporte deux issues (typiquement succès et échec) avec p la probabilité de succès.

Propriété 5 : espérance et variance de la loi de Bernoulli

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Alors :

$$E(X) = p \qquad\qquad V(X) = p(1-p)$$

1.3 Loi binomiale

Définition 5 : loi binomiale

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si on a : $\forall k \in [\![0, n]\!], p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$.

Cette loi est notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Remarques

On a souvent affaire à une loi binomiale de paramètres n et p lorsqu'on réalise n fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire X représente alors le nombre de "succès" dans cette série d'expériences.

Propriété 6 : espérance et variance de la loi binomiale

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p. Alors :

$$E(X) = np \qquad\qquad V(X) = np(1-p)$$

1.4 Exercices de synthèse

Exemples 1

1. Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique). On sait que :
   — 12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.
   — 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.
   On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.
   a. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
      i. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
      ii. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
      iii. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
      En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

b. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel, mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise). Quelle est la probabilité que, sur 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

2. On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé :
— S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1.
— S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2.
— Si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.
On désigne par A, B, C et N les événements suivants :
A : " Le dé amène le numéro 1 "
B : " Le dé amène un multiple de 3 "
C : " Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 "
N : " La boule tirée est noire "

a. Le joueur joue une partie.

i. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est $\dfrac{5}{3k}$.

ii. Calculer la probabilité que le dé ait amené le numéro 1 sachant que la boule tirée est noire.

iii. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

iv. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

b. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$. Le joueur joue 20 parties, toutes indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte, puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

2 Couples de variables aléatoires

2.1 Définitions

Définition 6 : couple de variables aléatoires

Soit Ω un univers fini.
On appelle couple de variables aléatoires sur Ω toute application

$$\begin{array}{rccc} Z & : \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

X et Y étant eux-même des variables aléatoires sur Ω.

Remarques :

— On peut noter ce couple (X, Y).
— Les variables aléatoires X et Y sont définies **sur le même univers**.
— On peut définir, de la même manière, un n-uplet de variables aléatoires.

$$\begin{array}{rccc} (X_1, ..., X_n) & : \Omega & \to & \mathbb{R}^n \\ & \omega & \mapsto & (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \end{array}$$

Exemples 2

1. On lance deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des nombres obtenus, Y celle qui donne le plus petit et Z le couple (X, Y). Décrire les variables aléatoires X, Y et Z.
2. Une urne contient deux boules rouges, trois boules bleues et une boule verte. On tire trois boules dans cette urne. R est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées et B est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules bleues tirées. On note Z le couple de variables aléatoires (R, B). Donner $Z(\Omega)$, l'ensemble des "valeurs" prises par Z.

Définition 7 : loi conjointe, loi marginale

Soit Ω un univers fini probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires.
La loi du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y est la loi

$$\begin{array}{rccc} P_{X,Y} & : X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ & (x, y) & \mapsto & P\big((X, Y) = (x, y)\big) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) \end{array}$$

On dit que les lois P_X de X et P_Y de Y sont les lois marginales de la loi conjointe (X, Y).

Remarques :

— On peut définir, de la même manière, la loi d'un $n - uplet$ de variables aléatoires ou loi conjointe des variables aléatoires X_1, X_2, ... X_n.
— A partir de la loi du couple, on peut déterminer les lois marginales mais la connaissance des lois marginales ne permet pas de déterminer la loi conjointe, comme le prouvent les exemples suivants.

Exemples 3

1. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω. On connaît la loi conjointe de X et Y, résumée dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$0,15$	$0,03$	$0,1$	0
2	$0,05$	$0,2$	0	$0,1$
3	$0,17$	$0,05$	0	$0,15$

   Déterminer les lois marginales X et Y.

2. Construire une autre loi conjointe qui a mêmes lois marginales que ci-dessus.

Définition 8 : loi conditionnelle

Soit Ω un univers fini probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires.
La loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ est la loi

$$\begin{array}{rccl} P_{(Y=y)} & : X(\Omega) & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P_{(Y=y)}(X=x) = \dfrac{P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)}{P(Y=y)} \end{array}$$

Remarque :
Si l'on connaît les lois marginales de X et Y et si on connaît en plus les lois conditionnelles, on peut reconstruire la loi conjointe.

Exemple 4

1. En reprenant l'exemple 3, donner les lois $P_{(Y=2)}$, $P_{(X=1)}$ et $P_{(Y\leqslant 3)}$.
2. On connaît les lois de X et de Y :

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$0,55$	$0,21$	$0,09$	$0,15$

y	1	2	3
$P(Y=y)$	$0,6$	$0,1$	$0,3$

   On connaît aussi les lois conditionnelles :

x	1	2	3	4
$P_{(Y=1)}(X=x)$	$0,4$	$0,3$	$0,1$	$0,2$

x	1	2	3	4
$P_{(Y=2)}(X=x)$	$0,25$	$0,25$	$0,25$	$0,25$

   Reconstituer la loi conjointe de X et Y.

2.2 Indépendance

Définition 9 :variables aléatoires indépendantes

Soit Ω un univers fini probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires.
On dit que les deux variables aléatoires sont indépendantes lorsque pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a

$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$$

Propriété 7 : propriété des variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors :

1. Pour toute partie A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$.
2. Pour toutes fonctions f et g à valeurs réelles définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, on a $f(X)$ et $g(Y)$ indépendantes.
3. En particulier : $E(XY) = E(X)E(Y)$

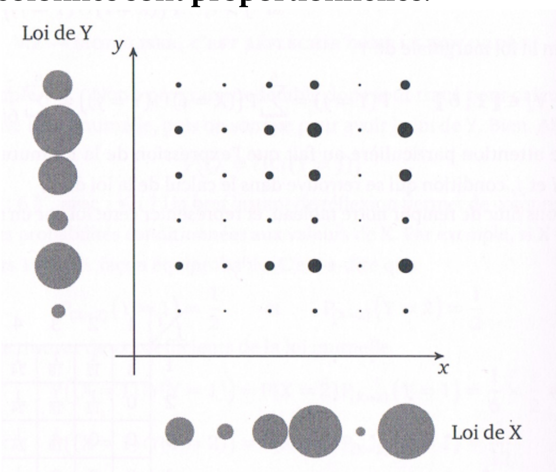
Exemple 5
Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω. On connaît la loi conjointe de X et Y, résumée dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$0,15$	$0,04$	$0,06$
2	$0,45$	$0,12$	$0,18$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Remarques :

— On peut représenter une loi conjointe de la manière suivante : l'aire de chaque point de coordonnées (x, y) représente la probabilité $P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$.
Ici, on a représenté la loi conjointe d'un **couple de variables indépendantes**. On remarque ici que **les colonnes sont proportionnelles**.



— Si les variables X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais la réciproque n'est pas forcément vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

$X\backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Ici, on a $E(X) = E(Y) = E(XY) = 0$ et pourtant,les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Généralisation (*)
On a la définition et la proposition équivalente pour un n-uplet de variables aléatoires :

1. On dit que X_1,... X_n sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout $(x_1,...,x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$ on a

$$P((X_1 = x_1) \cap ... \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1)...P(X_n = x_n)$$

2. Pour toute partie A_1 de $X_1(\Omega)$,... A_n de $X_n(\Omega)$, on a alors

$$P((X_1 \in A_1) \cap ... \cap (X_n \in A_n)) = P(X_1 \in A_1)...P(X_n \in A_n)$$

3. Des variables du type $f(X_1,..., X_p)$ et $g(X_{p+1},.., X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 8 : loi binomiale

Soient X_1, X_2, ...X_n des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

2.3 Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Définition 10 : covariance de deux variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω.

On définit alors la **covariance** des variables X et Y :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On définit également le **coefficient de corrélation linéaire** des variables X et Y :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété 9 : symétrie de la covariance, bilinéarité de la covariance

Pour toutes variables aléatoires X, Y, X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sur un univers probabilisé Ω, pour tous réels λ_1 et λ_2, on a les relations :

1. $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$.
2. $\text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1,Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2,Y)$.
3. $\text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X,Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X,Y_2)$.

Remarque
Il y a une analogie géométrique à la notion de covariance et de corrélation :
- La covariance peut-être interprétée comme un produit scalaire entre les variables $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$.
- La variance de X peut-être alors interprétée comme la norme au carré de $X - E(X)$ et donc l'écart-type comme la norme de $X - E(X)$.
- La coefficient de corrélation linéaire peut alors faire penser au cosinus, par analogie avec la formule $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}$.

Exemples 6

1. On reprend l'exemple 3 et les deux variables aléatoires X et Y dont on connaît la loi du couple (X,Y), résumée dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	$0,15$	$0,03$	$0,1$	0
2	$0,05$	$0,2$	0	$0,1$
3	$0,17$	$0,05$	0	$0,15$

   Déterminer la covariance ainsi que le coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** et de même loi sur $\{0;1;2\}$. On donne

$$P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = \frac{1}{6}; \qquad P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}; \qquad P(X_1 = 2) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$$

   Soient $S = X_1 + X_2$ et $P = X_1 X_2$.

   a. Donner la loi du couple (X_1, X_2), celle du couple (S,P) puis celles de S et P.

   b. S et P sont-elles indépendantes ? Justifier avec rigueur.

   c. Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$ et $\text{Cov}(S,P)$.

Propriété 10 : variance d'une combinaison linéaire de deux variables

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω. Soient deux nombres réels a et b. On a alors :

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\text{Cov}(X,Y)$$

Propriété 11 : propriété du coefficient de corrélation linéaire

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω. On a alors

1. $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$ qui se traduit aussi par $\text{Cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$.
2. $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe un réel a tel que $(Y = aX+b)$ soit un événement certain (on dit que X et Y sont linéairement corrélés).

Remarque :
Les deux dernières propriétés font penser à $||a\vec{u}+b\vec{v}||^2 = a^2||\vec{u}||^2 + b^2||\vec{v}||^2 + 2ab\vec{u}.\vec{v}$ et $|\cos(\vec{u},\vec{v})| \leqslant 1$ (avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires).

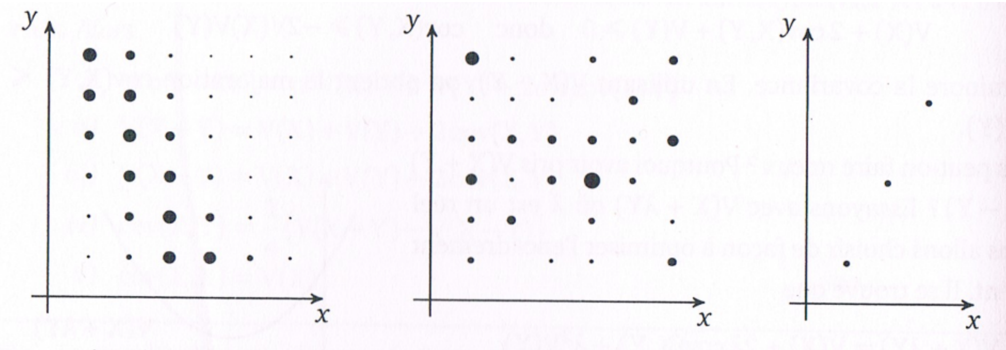
Propriété 12 : propriétés de deux variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers probabilisé Ω. **Si X et Y sont indépendantes**, alors :

1. $\text{Cov}(X,Y) = 0$ (donc $\rho(X,Y) = 0$).
2. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarques :

— Il ne faut pas confondre les notions de corrélations et de dépendance :
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X,Y) = 0$ mais la réciproque n'est pas vraie (cf le contre-exemple du début de la page 9).
- La corrélation linéaire peut s'appréhender "graphiquement" comme le montrent les diagrammes ci-dessous :



ρ(X, Y) proche de -1 — ρ(X, Y) proche de 0 — ρ(X, Y) égale à 1

— On peut de même montrer que si X_1, X_2,..., X_n sont des variables **mutuellement indépendantes**, alors

$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$$

Cela nous permet entre autres de retrouver la formule qui donne la variance d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemples 7
Les questions sont indépendantes.

1. On considère la loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y.

$X \backslash Y$	-4	2	7
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

   Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)$.

2. On considère la loi de probabilité conjointe de deux variables aléatoires X et Y.

$X \backslash Y$	-2	-1	4	5
1	$0,1$	$0,2$	0	$0,3$
2	$0,2$	$0,1$	$0,1$	0

   Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)$.

3. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 celui de la deuxième.
   - **a.** Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) puis les lois marginales.
   - **b.** Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   - **c.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_1, X_2)$
   - **d.** Sans faire de calculs, quel sera le coefficient de corrélation linéaire si les deux tirages se font dans une urne contenant seulement deux boules ?