Chapitre 5 : CORRECTION DES EXEMPLES

Exemples 1

1. **a.** On appelle M l'évènement "Le personnel interrogé est un médecin", S l'évènement "Le personnel interrogé est un soignant" et A l'évènement "Le personnel interrogé est un personnel AT". De même, on appelle F l'évènement "Le personnel interrogé est une femme".

   i. On a $P(F\bigcap S) = P(S).P_S(F) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$
   La probabilité d'interroger une femme soignante est de 0,6532.

   ii. De même, $P(F\bigcap M) = P(M).P_M(F) = P(M)\left(1 - P_M\left(\overline{F}\right)\right) = 0,12 \times 0,33 = 0,0396$
   La probabilité d'interroger une femme médecin est de 0,0396.

   iii. Le système $\{M, S, A\}$ constitue une partition de l'univers. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales :
   $P(F) = P(F\bigcap M) + P(F\bigcap S) + P(F\bigcap A)$ soit
   $P(F\bigcap A) = P(F) - P(F\bigcap M) - P(F\bigcap S) = 0,8 - 0,6532 - 0,0396 = 0,1072.$
   La probabilité d'interroger une femme AT est de 0,1072.
   On a $P_A(F) = \dfrac{P(F\bigcap A)}{P(A)} = \dfrac{P(F\bigcap A)}{1 - P(M) - P(S)} = \dfrac{0,1072}{0,17} = 0,6306$ arrondi à 10^{-4}.
   La probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT est égale à 0,6306 arrondi à 10^{-4}.

   b. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de médecins destinataires du courrier. X compte le nombre de "succès" (un médecin reçoit le courrier) dans une succession de 40 expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre 0,12.
   On en déduit que X suit une loi binômiale $\mathscr{B}(40; 0,12)$.
   On a donc $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} 0,12^{10} \times 0,88^{30} = 0,1113$ arrondi à 10^{-4}. La probabilité que, sur 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins est égale à 0,1113 arrondi à 10^{-4}.

2. **a.** i. Le système $\{A; B; C\}$ constitue une partition de Ω. On peut utiliser la formule des probabilités totales :
   $P(N) = P(N\bigcap A) + P(N\bigcap B) + P(N\bigcap C) =$
   $P(A) \times P_A(N) + P(B) \times P_B(N) + P(C) \times P_C(N).$
   $P(N) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{k} + \dfrac{2}{6} \times \dfrac{2}{k} + \dfrac{3}{6} \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{5}{3k}$
   Ainsi, la probabilité qu'il obtienne une boule noire est $\dfrac{5}{3k}$.

   ii. On a $P_N(A) = \dfrac{P(N\bigcap A)}{P(N)} = \dfrac{P_A(N) \times P(A)}{P(N)}$ d'après la formule de Bayes.
   Donc $P_N(A) = \dfrac{\dfrac{3}{k} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{5}{3k}} = \dfrac{3}{10}$
   Ainsi, la probabilité que le dé ait amené le numéro 1 sachant que la boule tirée est noire est égale à $\dfrac{3}{10}$.

   iii. On cherche k tel que $P(N) \geq \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{5}{3k} \geq \dfrac{1}{2} \iff 3k \leq 10 \iff k \leq \dfrac{10}{3}$.
   Or, on sait que k est un entier supérieur ou égal à 3 donc le seul entier qui convient est $k = 3$.
   Ainsi, l'unique valeur de k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$ est $k = 3$.

iv. On cherche k tel que $P(N) = \frac{1}{30} \iff \frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \iff k = \frac{30 \times 5}{3} = 50$
Ainsi, la valeur de k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$ est $k = 50$.

b. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées sur les 20 parties.
X compte le nombre de "succès" (une boule noire est tirée) dans la succession de 20 épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{1}{30}$.
X suit donc une loi binômiale $\mathscr{B}\left(20; \frac{1}{30}\right)$.
On cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{1}{30}\right)^0\left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 0,492$ arrondi à 10^{-3}.
Ainsi, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire est égale à $1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 0,492$ arrondi à 10^{-3}.

Exemples 2

1. En supposant les deux dés discernables, on appelle X_1 le numéro amené par le premier dé et X_2 celui amené par le second dé, et on décrit l'univers à parti de ce tableau à double entrée :

$X_1 \setminus X_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

X et Y prennent les valeurs de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Pour écrire les lois de X et de Y, il suffit de compter les évènements correspondant :
— $X = 1$ correspond aux évènement (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6) et (6,1) donc $p(X = 1) = \frac{11}{36}$;
— $X = 2$ correspond aux évènements (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6) et (6,2) donc $p(X = 2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
— $X = 3$ correspond aux évènements (3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (3,6) et (6,3) donc $p(X = 3) = \frac{7}{36}$;
— $X = 4$ correspond aux évènements (4,4), (4,5), (5,4), (4,6) et (6,4) donc $p(X = 4) = \frac{5}{36}$;
— $X = 5$ correspond aux évènements (5,5), (5,6) et (6,5) donc $p(X = 5) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$;
— $X = 6$ correspond au seul évènement (6,6) donc $p(X = 6) = \frac{1}{36}$.

On en déduit la loi de X :

$X = k$	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

De même, on peut écrire la loi de Y :

$Y=k$	1	2	3	4	5	6
$p(Y=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

On remarque que l'évènement $X>Y$ est l'évènement impossible et donc pour tout $i>j$, on a $P\left[Z=(i,j)\right]=0$.

— Pour $i=j$, on a $Z=(i,i)=\{(i,i)\}$ donc $P\left[Z=(i,i)\right]=\dfrac{1}{36}$.

— Enfin, pour tout $i<j$, on a $Z=(i,j)=\left\{(i,j);(j,i)\right\}$ donc $P\left[Z=(i,j)\right]=\dfrac{1}{18}$.

On en déduit la loi de Z :

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18
2	0	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18
3	0	0	1/36	1/18	1/18	1/18
4	0	0	0	1/36	1/18	1/18
5	0	0	0	0	1/36	1/18
6	0	0	0	0	0	1/36

2. $R(\Omega)=\{0;1;2\}$ et $B(\Omega)=\{0;1;2;3\}$ donc on pourrait supposer que $Z(\Omega)=\left\{(i,j);0\leq\leq 2 \text{ et } 0\leq j\leq 3\right\}$. On va montrer que certains de ces évènements sont impossibles.

— L'urne contient une seule boule verte donc tous les évènements (i,j) avec $i+j<2$ sont impossibles.

— Comme on tire trois boules, tous les évènements (i,j) avec $i+j>3$ sont impossibles.

— Il reste seulement les évènements (i,j) avec $i+j=2$ (et on aura tiré une boule de chaque couleur) et les évènements (i,j) avec $i+j=3$ (on n'aura tiré aucune boule verte).

Finalement, $Z(\Omega)=\{(1,1);(0,2);(2,0);(1,2);(2,1);(0,3);(3,0)\}$.

Exemples 3

1. On a $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ et pour tout $i\in X(\Omega)$, on a $P(X=i)=\sum_{j=1}^{4} P\left[(X=i)\bigcap(Y=j)\right]$.

De même, on a $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$ et pour tout $j\in Y(\Omega)$, on a $P(Y=j)=\sum_{i=1}^{3} P\left[(X=i)\bigcap(Y=j)\right]$.

On en déduit les lois de X et de Y :

$X=i$	1	2	3
$p(X=i)$	0,28	0,35	0,37

$Y=j$	1	2	3	4
$p(Y=j)$	0,37	0,28	0,1	0,25

2. On vérifie facilement que cette loi conjointe a les mêmes lois marginales que la précédente :

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0,15	0,03	0	0,1
2	0,1	0,1	0,1	0
3	0,07	0,15	0	0,15

Exemple 4

1. **Loi conditionnelle** $P_{(Y=2)}$:
   — $P_{(Y=2)}(X=1)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y=2)\right]}{P(Y=2)}=\dfrac{0,03}{0,28}=\dfrac{3}{28}$
   — $P_{(Y=2)}(X=2)=\dfrac{P\left[(X=2)\bigcap(Y=2)\right]}{P(Y=2)}=\dfrac{0,2}{0,28}=\dfrac{5}{7}$
   — $P_{(Y=2)}(X=3)=\dfrac{P\left[(X=3)\bigcap(Y=2)\right]}{P(Y=2)}=\dfrac{0,05}{0,28}=\dfrac{5}{28}$
   On en déduit la loi conditionnelle $P_{(Y=2)}$:

$X=i$	1	2	3
$p_{(Y=2)}(X=i)$	$3/28$	$5/7$	$5/28$

   Loi conditionnelle $P_{(X=1)}$:
   — $P_{(X=1)}(Y=1)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y=1)\right]}{P(X=1)}=\dfrac{0,15}{0,28}=\dfrac{15}{28}$
   — $P_{(X=1)}(Y=2)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y=2)\right]}{P(X=1)}=\dfrac{0,03}{0,28}=\dfrac{3}{28}$
   — $P_{(X=1)}(Y=3)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y=3)\right]}{P(X=1)}=\dfrac{0,1}{0,28}=\dfrac{5}{14}$
   — $P_{(X=1)}(Y=4)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y=4)\right]}{P(X=1)}=0$
   On en déduit la loi conditionnelle $P_{(X=1)}$:

$Y=j$	1	2	3
$p_{(X=1)}(Y=j)$	$15/28$	$3/28$	$5/14$

   Loi conditionnelle $P_{(Y\leq 3)}$:
   — $P_{(Y\leq 3)}(X=1)=\dfrac{P\left[(X=1)\bigcap(Y\leq 3)\right]}{P(Y\leq 3)}=\dfrac{0,28}{0,75}=\dfrac{28}{75}$
   — $P_{(Y\leq 3)}(X=2)=\dfrac{P\left[(X=2)\bigcap(Y\leq 3)\right]}{P(Y\leq 3)}=\dfrac{0,25}{0,75}=\dfrac{1}{3}$
   — $P_{(Y\leq 3)}(X=3)=\dfrac{P\left[(X=3)\bigcap(Y\leq 3)\right]}{P(Y\leq 3)}=\dfrac{0,22}{0,75}=\dfrac{22}{75}$
   On en déduit la loi conditionnelle $P_{(Y\leq 3)}$:

$X=i$	1	2	3
$p_{(Y\leq 3)}(X=i)$	$28/75$	$1/3$	$22/75$

2. Pour tout $i\in\{1;2;3;4\}$ et $j\in\{1;2;3\}$, on a
   $P\left[(X=i)\bigcap(Y=j)\right]=P_{Y=j}(X=i)\times P(Y=j)$, avec
   $P_{Y=3}(X=i)=P(X=i)-P_{Y=1}(X=i)-P_{Y=2}(X=i)$.
   On en déduit la loi conjointe de (X,Y) :

$X\setminus Y$	1	2	3
1	0,24	0,025	0,285
2	0,18	0,025	0,005
3	0,06	0,025	0,005
4	0,12	0,025	0,005

Exemple 5

On construit les lois de X et Y :

$X=i$	1	2
$P(X=i)$	0,25	0,75

$Y=j$	1	2	3
$P(Y=j)$	0,6	0,16	0,24

— $P\left[(X=1)\bigcap(Y=1)\right]=0,15$ et $P(X=1)\times P(Y=1)=0,6\times 0,25=0,15$
— De même, on montre que pour toutes les valeurs de i et j on a bien $P\left[(X=i)\bigcap(Y=j)\right]=P(X=i)\times P(Y=j)$.

Et donc X et Y sont indépendantes.

Exemples 6

1. On dresse la loi du produit XY.
   XY peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12.
   — $P(XY=1)=P\left[(X=1)\bigcap(Y=1)\right]=0,15$;
   — $P(XY=2)=P\left[(X=2)\bigcap(Y=1)\right]+P\left[(X=1)\bigcap(Y=2)\right]=0,08$;
   — $P(XY=3)=P\left[(X=3)\bigcap(Y=1)\right]+P\left[(X=1)\bigcap(Y=3)\right]=0,27$;
   — $P(XY=4)=P\left[(X=1)\bigcap(Y=4)\right]+P\left[(X=2)\bigcap(Y=2)\right]=0,2$;
   — $P(XY=6)=P\left[(X=2)\bigcap(Y=3)\right]+P\left[(X=3)\bigcap(Y=2)\right]=0,05$;
   — $P(XY=8)=P\left[(X=2)\bigcap(Y=4)\right]=0,1$;
   — $P(XY=9)=P\left[(X=3)\bigcap(Y=3)\right]=0$;
   — $P(XY=12)=P\left[(X=2)\bigcap(Y=1)\right]+P\left[(X=1)\bigcap(Y=2)\right]=0,15$.

   On en déduit la loi de XY :

$XY=i$	1	2	3	4	6	8	12
$P(XY=i)$	0,15	0,08	0,27	0,2	0,05	0,1	0,15

   On a donc
   $E(XY)=1\times 0,15+2\times 0,08+3\times 0,27+4\times 0,2+6\times 0,05+8\times 0,1+12\times 0,15=4,82$
   On reprend les résultats de l'exemple 3 pour les espérances de X et de Y :
   $E(X)=1\times 0,28+2\times 0,35+3\times 0,37=2,09$ et
   $E(Y)=1\times 0,37+2\times 0,28+3\times 0,1+4\times 0,25=2,23$.
   On a donc $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,16$ arrondi à 10^{-2}.
   On dresse les lois de X^2 et de Y^2 :

$X^2=i^2$	1	4	9
$p(X^2=i^2)$	0,28	0,35	0,37

$Y^2=j^2$	1	4	9	16
$p(Y^2=j^2)$	0,37	0,28	0,1	0,25

   $E\left(X^2\right)=1\times 0,28+4\times 0,35+9\times 0,37=5,01$ et
   $E\left(Y^2\right)=1\times 0,37+4\times 0,28+9\times 0,1+16\times 0,25=6,39$.
   Donc $V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=5,01-2,09^2=0,6419$ et $\sigma(X)=0,80$ arrondi à 10^{-2}.
   Et $V(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=6,39-2,23^2=1,4171$ et $\sigma(Y)=1,19$ arrondi à 10^{-2}.
   on a donc $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}=\dfrac{0,16}{0,8\times 1,19}=0,17$ arrondi à 10^{-2}.

2. **a.** X_1 et X_2 étant indépendantes, on a, pour toutes les valeurs de i et de j :
$P\left[(X_1, X_2) = (i, j)\right] = P(X_1 = i) \times P\left(X_2 = j\right)$. On en déduit la loi du couple (X_1, X_2) :

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	1/36	1/18	1/12
1	1/18	1/9	1/6
2	1/12	1/6	1/4

On a $S(\Omega) = \{0;1;2;3;4\}$ et $P(\Omega) = \{0;1;2;4\}$.

— $(S = 0)\bigcap(P = 0) = (X_1, X_2) = (0,0)$ donc $P[(S,P) = (0,0)] = 1/36$.

— Pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 4$, les évènements $(S = 0)\bigcap(P = i)$ sont impossibles.

— $(S = 1)\bigcap(P = 0) = (X_1, X_2) = (1,0)\bigcup(X_1, X_2) = (0,1)$ donc
$P[(S,P) = (1,0)] = 2/18 = 1/9$.

— Pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 4$, les évènements $(S = 1)\bigcap(P = i)$ sont impossibles.

— $(S = 2)\bigcap(P = 0) = (X_1, X_2) = (2,0)\bigcup(X_1, X_2) = (0,2)$ donc
$P[(S,P) = (2,0)] = 2/12 = 1/6$.

— $(S = 2)\bigcap(P = 1) = (X_1, X_2) = (1,1)$ donc $P[(S,P) = (2,1)] = 1/9$.

— Pour $i = 2$ et $i = 4$, les évènements $(S = 2)\bigcap(P = i)$ sont impossibles.

— Pour $i = 0$, $i = 1$ et $i = 4$, les évènements $(S = 3)\bigcap(P = i)$ sont impossibles.

— $(S = 3)\bigcap(P = 2) = (X_1, X_2) = (1,2)\bigcup(X_1, X_2) = (2,1)$ donc
$P[(S,P) = (3,2)] = 2/6 = 1/3$.

— Pour $i = 0$, $i = 1$ et $i = 3$, les évènements $(S = 4)\bigcap(P = i)$ sont impossibles.

— $(S = 4)\bigcap(P = 4) = (X_1, X_2) = (2,2)$ donc $P[(S,P) = (4,4)] = 1/4$.

On en déduit la loi du couple (S,P) :

$S \backslash P$	0	1	2	4
0	1/36	0	0	0
1	1/9	0	0	0
2	1/6	1/9	0	0
3	0	0	1/3	0
4	0	0	0	1/4

Et celles de S et de P :

$S = i$	0	1	2	3	4
$P(S = i)$	1/36	1/9	5/18	1/3	1/4

$P = i$	0	1	2	4
$P(P = i)$	11/36	1/9	1/3	1/4

b. On a, par exemple, $P[(S,P) = (0,1)] \neq P(S = 0) \times P(P = 1)$ donc S et P ne sont pas indépendantes.

c. $E(S) = 0 \times \dfrac{1}{36} + 1 \times \dfrac{1}{9} + 2 \times \dfrac{5}{18} + 3 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{3}$.
$E(P) = 0 \times \dfrac{11}{36} + 1 \times \dfrac{1}{9} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{16}{9}$.
$E\left(S^2\right) = 0 \times \dfrac{1}{36} + 1 \times \dfrac{1}{9} + 4 \times \dfrac{5}{18} + 9 \times \dfrac{1}{3} + 16 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{74}{9}$.
$E\left(P^2\right) = 0 \times \dfrac{11}{36} + 1 \times \dfrac{1}{9} + 4 \times \dfrac{1}{3} + 16 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{49}{9}$
On en déduit que $V(S) = E\left(S^2\right) - E(S)^2 = \dfrac{74}{9} - \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$ et

$V(P) = E\left(P^2\right) - E(P)^2 = \dfrac{49}{9} - \left(\dfrac{16}{9}\right)^2 = \dfrac{185}{81}$.

On dresse la loi de SP : $SP(\Omega)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0;1;2;3;4;6;8;12;16\}$.

— $(SP=0)=(S=0)\bigcup(P=0)$ donc $P(SP=0)=P(S=0)+P(P=0)-P[(S=0)\bigcap(P=0)]=\dfrac{1}{36}+\dfrac{11}{36}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{11}{36}$;

— $(SP=1)=(S=1)\bigcap(P=1)=\emptyset$ donc $P(SP=1)=0$

— $(SP=2)=[(S=1)\bigcap(P=2)]\bigcup[(S=2)\bigcap(P=1)]$ (union disjointe) donc $P(SP=2)=0+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{9}$;

— $(SP=3)=(S=3)\bigcap(P=1)=\emptyset$ donc $P(SP=3)=0$;

— $(SP=4)=[(S=1)\bigcap(P=4)]\bigcup[(S=4)\bigcap(P=1)]\bigcup[(S=2)\bigcap(P=2)]=\emptyset$ donc $P(SP=4)=0$;

— $(SP=6)=(S=3)\bigcap(P=2)$ donc $P(SP=6)=\dfrac{1}{3}$;

— $(SP=8)=[(S=1)\bigcap(P=4)]\bigcup[(S=4)\bigcap(P=1)]=\emptyset$ donc $P(SP=8)=0$;

— $(SP=12)=(S=3)\bigcap(P=4)=\emptyset$ donc $P(SP=8)=0$;

— $(SP=16)=(S=4)\bigcap(P=4)$ donc $P(SP=16)=\dfrac{1}{4}$;

On en déduit la loi de SP :

$SP=i$	0	2	6	16
$P(SP=i)$	11/36	1/9	1/3	1/4

On a donc $E(SP)=0\times\dfrac{11}{36}+2\times\dfrac{1}{9}+6\times\dfrac{1}{3}+16\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{56}{9}$. Donc $\operatorname{cov}(S,P)=E(SP)-E(S)\times E(P)=\dfrac{56}{9}-\dfrac{8}{3}\times\dfrac{16}{9}=\dfrac{40}{27}$

Exemples 7

1. On dresse tout d'abord les lois de X et de Y :

$X=i$	1	5
$P(X=i)$	1/2	1/2

$Y=i$	-4	2	7
$P(Y=i)$	3/8	3/8	1/4

On en déduit les espérances de X et de Y :
$E(X)=1\times\dfrac{1}{2}+5\times\dfrac{1}{2}=3$ et $E(Y)=-4\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+7\times\dfrac{1}{4}=1$.
Puis les espérances de X^2 et Y^2 :
$E\left(X^2\right)=1\times\dfrac{1}{2}+25\times\dfrac{1}{2}=13$ et $E\left(Y^2\right)=16\times\dfrac{3}{8}+4\times\dfrac{3}{8}+49\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{79}{4}$.
On a donc $V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=4$ et $V(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=\dfrac{75}{4}$.
Et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=2, \sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

On dresse maintenant la loi de XY, qui prend ses valeurs dans $\{-20;-4;2;7;10;35\}$.

— $P(XY=-20)=P\left[(X=5)\bigcap(Y=-4)\right]=\dfrac{1}{4}$;

— $P(XY=-4)=P\left[(X=1)\bigcap(Y=-4)\right]=\dfrac{1}{8}$;

— $P(XY=2)=P\left[(X=1)\bigcap(Y=2)\right]=\dfrac{1}{4}$;

— $P(XY=7)=P\left[(X=1)\bigcap(Y=7)\right]=\dfrac{1}{8}$;

— $P(XY=8)=P\left[(X=5)\bigcap(Y=2)\right]=\dfrac{1}{8}$;

— $P(XY=35)=P\left[(X=5)\bigcap(Y=7)\right]=\dfrac{1}{8}$;

On en déduit la loi de XY :

$XY=i$	-20	-4	2	7	10	35
$P(XY=i)$	1/4	1/8	1/4	1/8	1/8	1/8

On a donc $E(XY)=-20\times\dfrac{1}{4}-4\times\dfrac{1}{8}+2\times\dfrac{1}{4}+7\times\dfrac{1}{8}+10\times\dfrac{1}{8}+35\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$

On a donc $\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{3}{2}-3=-\dfrac{3}{2}$ et enfin :

$$\rho(X,Y)=\frac{\text{cov}\ (X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}=\frac{-3/2}{5\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{10}=-0,173 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2. On dresse tout d'abord les lois de X et de Y :

$X=i$	1	2
$P(X=i)$	0,6	0,4

$Y=i$	-2	-1	4	5
$P(Y=i)$	0,3	0,3	0,1	0,3

On en déduit les espérances de X et de Y :
$E(X)=1\times0,6+2\times0,4=1,4$ et $E(Y)=-2\times0,3-1\times0,3+4\times0,1+5\times0,3=1$.
Puis les espérances de X^2 et Y^2 :
$E\left(X^2\right)=1\times0,6+4\times0,4=2,2$ et $E\left(Y^2\right)=4\times0,3+1\times0,3+16\times0,1+25\times0,3=10,6$.
On a donc $V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=0,24$ et $V(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=9,6$.
Et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0,49$ arrondi à 10^{-2},$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=3,10$ arrondi à 10^{-2}

On dresse maintenant la loi de XY, qui prend ses valeurs dans $\{-4;-2-1;4;5;8;10\}$.
- $P(XY=-4) = P[(X=2)\bigcap(Y=-2)] = 0,2$;
- $P(XY=-2) = P[(X=1)\bigcap(Y=-2)\bigcup(X=-1)\bigcap(Y=2)] = 0,1+0,1 = 0,2$;
- $P(XY=-1) = P[(X=1)\bigcap(Y=-1)] = 0,2$;
- $P(XY=4) = P[(X=1)\bigcap(Y=4)] = 0$;
- $P(XY=5) = P[(X=1)\bigcap(Y=5)] = 0,3$;
- $P(XY=8) = P[(X=2)\bigcap(Y=4)] = 0,1$;
- $P(XY=10) = P[(X=2)\bigcap(Y=5)] = 0$.

On en déduit la loi de XY :

$XY=i$	-4	-2	-1	5	8
$P(XY=i)$	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

On a donc $E(XY) = -4\times 0,2 - 2\times 0,2 - 1\times 0,2 + 5\times 0,3 + 8\times 0,1 = 0,9$
On a donc $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0,5$ et enfin :

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}\,(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = \frac{-0,5}{0,49\times 3,1} = -0,33 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

3. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 celui de la deuxième.

a. Pour i et j dans $\{1;2;3;4\}$, on a

$$P\left[(X_1=i)\bigcap\left(X_2=j\right)\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } i=j \text{ (tirage sans remise)} \\ P_{X_1=i}\left(X_2=j\right)\times P\left(X_1=i\right) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} \text{ si } i\neq j \end{cases}$$

On en déduit la loi du couple (X_1,X_2) :

$X_1\backslash X_2$	1	2	3	4
1	0	1/12	1/12	1/12
2	1/12	0	1/12	1/12
3	1/12	1/12	0	1/12
4	1/12	1/12	1/12	0

Puis les lois de X_1 et X_2 (qui sont toutes deux des lois uniformes de paramètre 4) :

$X=i$	1	2	3	4
$P(X=i)$	1/4	1/4	1/4	1/4

b. On a, par exemple, $P[(X_1=1)\bigcap(X_2=i)] = 0 \neq P(X_1=1)\times P(X_2=1)$ donc les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c. On a $E(X_1) = E(X_2) = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $V(X_1) = V(X_2) = \dfrac{4^2-1}{12} = \dfrac{5}{4}$ donc $\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

On détermine la loi de X_1X_2, qui prend ses valeurs dans $\{1;2;3;4;6;8;9;12;16\}$.
- $P(X_1X_2=1) = P[(X_1=1)\bigcap(X_2=1)] = 0$;
- $P(X_1X_2=2) = P[(X_1=1)\bigcap(X_2=2)\bigcup(X_1=2)\bigcap(X_2=1)] = 2\times\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$;
- $P(X_1X_2=3) = P[(X_1=1)\bigcap(X_2=3)\bigcup(X_1=3)\bigcap(X_2=1)] = 2\times\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$;
- $P(X_1X_2=4) = P[(X_1=1)\bigcap(X_2=4)\bigcup(X_1=4)\bigcap(X_2=1)\bigcup(X_1=2)\bigcap(X_2=2)] = 2\times\dfrac{1}{12}+0 = \dfrac{1}{6}$;

— $P(X_1X_2=6)=P\left[(X_1=2)\bigcap(X_2=3)\bigcup(X_1=3)\bigcap(X_2=2)\right]=2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$;

— $P(X_1X_2=8)=P\left[(X_1=2)\bigcap(X_2=4)\bigcup(X_1=4)\bigcap(X_2=2)\right]=2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$;

— $P(X_1X_2=9)=P\left[(X_1=3)\bigcap(X_2=3)\right]=0$;

— $P(X_1X_2=12)=P\left[(X_1=4)\bigcap(X_2=3)\bigcup(X_1=3)\bigcap(X_2=4)\right]=2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$;

— $P(X_1X_2=16)=P\left[(X_1=4)\bigcap(X_2=4)\right]=0$;

On en déduit la loi de XY :

$X_1X_2=i$	2	3	4	6	8	12
$P(X_1X_2=i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On a donc $E(X_1X_2)=\dfrac{1}{6}(2+3+4+6+8+12)=\dfrac{35}{6}$

On a donc $\text{cov}(X_1,X_2))=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-\dfrac{5}{12}$ et enfin :

$$\rho(X_1,X_2))=\frac{\text{cov }(X_1,X_2)}{\sigma(X_1).\sigma(X_2)}=\frac{-5/12}{5/4}=\frac{1}{3}.$$

Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_1,X_2)$

d. On montre facilement que dans le cas où l'urne contient seulement deux boules, On a $X_2=3-X_1$ et donc le coefficient de corrélation linéaire sera égal à -1 !