TD Chapitre 5 : Variables aléatoires finies - CORRECTION

Exercice 1

1. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, p(X = k) = \lambda k.$$

On a $\sum_{k=1}^6 p(X = k) = 1$ donc $\lambda \sum_{k=1}^6 k = 1$ soit $\lambda \times \frac{7 \times 6}{2} = 1$ et donc $\lambda = \frac{1}{21}$.

La loi de X est donc :

k	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 k p(X = k) = \frac{1}{21} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}.$$

2. Y prend les valeurs 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Ainsi, la loi de Y est :

k	5	7	9	11	13	15
$p(Y = k)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

$$E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = \frac{26}{3} + 3 = \frac{35}{3}.$$

3. Z prend les valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Ainsi; la loi de Z est :

k	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$p(Z = k)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

$$E(Z) = \sum_{k=1}^6 k p(Z = k) = \frac{2}{7}.$$

On remarque que $E\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{E(X)}$.

Exercice 2

1. Z prend les valeurs 0, 1 et 2.

Soit D_1 et D_2 les évènements respectifs : "Le premier véhicule est disponible" et "Le second véhicule est disponible". On suppose que les évènements D_1 et D_2 sont indépendants.

— On a " $Z = 0$ " = $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ et, comme ces évènements sont également indépendants :

$$p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = p(\overline{D_1}) \times p(\overline{D_2}) = \frac{1}{25}.$$

— De même, " $Z = 1$ " = $(D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (\overline{D_1} \cap D_2)$ et comme ces évènements sont incompatibles :

$$p(Z = 1) = p(D_1 \cap \overline{D_2}) + p(\overline{D_1} \cap D_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}.$$

— Enfin, " $Z = 2$ " = $D_1 \cap D_2$ et donc $p(Z = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$.

En résumé, on a :

k	0	1	2
$p(Z = k)$	1/25	8/25	16/25

2. Y prend les valeurs 0, 1 et 2.

— $Y = 0$ correspond à l'évènement "Aucun client n'est satisfait".

On a donc deux cas de figure : soit aucun client ne s'est présenté, soit au moins un client s'est présenté et aucune voiture n'était disponible.

$p(Y = 0) = p(X = 0) + p((X \geq 1) \cap (Z = 0)) = p(X = 0) + p(X \geq 1) \times p(Z = 0)$
 puisque les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Ainsi, $p(Y = 0) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{25} = \frac{17}{125}$.

— De même, $p(Y = 1) = p(X = 1) \times p(Z \geq 1) + p(X \geq 2) \times p(Z = 1)$.

Donc $p(Y = 1) = \frac{3}{10} \times \frac{24}{25} + \frac{6}{10} \times \frac{8}{25} = \frac{12}{25}$.

— Enfin, $p(Y = 2) = p(X \geq 2) \times p(Z = 2) = \frac{6}{10} \times \frac{16}{25} = \frac{48}{125}$.

En résumé, on a :

k	0	1	2
$p(Y = k)$	17/125	12/25	48/125

3. La marge brute par jour est égale à $300Y$. La marge brute moyenne par jour est donc égale à $E(300Y) = 300E(Y)$.

Or, $E(Y) = 0 + \frac{12}{25} + 2 \times \frac{48}{125} = \frac{156}{125}$.

La marge brute moyenne par jour est donc égale à $\frac{1872}{5}$ soit 374,4 euro.

Exercice 3 (*)

1. X_1 prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

On appelle E_i l'évènement "la boule tirée au tirage i porte le numéro 1". Alors

" $X_1 = 0$ " = $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ et donc $p(X_1 = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

" $X_1 = 1$ " = $(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3})$ et, comme ces évènements sont disjoints :

$p(X_1 = 1) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$.

" $X_1 = 2$ " = $(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3})$ et, comme ces évènements sont disjoints :

$p(X_1 = 2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{9}{20}$.

Enfin, " $X_1 = 3$ " = $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$ et :

$p(X_1 = 3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Finalement, on a :

k	0	1	2	3
$p(X_1 = k)$	1/20	9/20	9/20	1/20

On a $E(X_1) = 0 + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$.

$E(X_1^2) = 0 + 1 \times \frac{9}{20} + 4 \times \frac{9}{20} + 9 \times \frac{1}{20} = \frac{27}{10}$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{9}{20}$.

2. X_2 prend les valeurs 3, 4, 5 et 6.

En reprenant les notations précédentes :

" $X_2 = 3$ " = $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ et $p(X_2 = 3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

" $X_2 = 4$ " = $(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3} \cap E_4) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3 \cap E_4) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$.

On a donc $p(X_2 = 4) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$.

" $X_2 = 5$ " = $(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4} \cap E_5) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap E_4 \cap E_5) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3 \cap \overline{E_4} \cap E_5)$
 $\cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E_4} \cap E_5) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3} \cap E_4 \cap E_5) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5)$

$$\text{On a donc } p(X_2 = 5) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ \text{Donc } p(X_2 = 5) = \frac{3}{10}.$$

$$\text{On montre de même que } p(X_2 = 6) = 10 \times \frac{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, on a :

k	3	4	5	6
$p(X_2 = k)$	1/20	3/20	3/10	1/2

$$\text{On a } E(X_2) = 3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{4}.$$

$$E(X_2^2) = 9 \times \frac{1}{20} + 16 \times \frac{3}{20} + 25 \times \frac{3}{10} + 36 \times \frac{1}{2} = \frac{567}{20} \text{ et } V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{63}{80}.$$

3. X_3 peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

En notant F_i l'évènement "la boule tirée au tirage i est la boule qui porte le numéro 3", on a :

$$"X_3 = 1" = F_1 \text{ et } p(X_3 = 1) = \frac{1}{6}.$$

$$"X_3 = 2" = \overline{F_1} \cap F_2 \text{ et } p(X_3 = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}.$$

$$"X_3 = 3" = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \text{ et } p(X_3 = 3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{On montre de même que } p(X_3 = 4) = p(X_3 = 5) = p(X_3 = 6) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, on a :

k	1	2	3	4	5	6
$p(X_3 = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\text{On a } E(X_3) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$$

$$E(X_3^2) = \frac{1}{6} \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} \text{ et } V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = \frac{35}{12}.$$

4. X_4 peut prendre les valeurs 3 (1+1+1), 4 (1+1+2), 5(1+1+3 ou 1+2+2), 6(1+2+3) et 7 (2+3+3)

En notant (et c'est un abus de notation que je me permets d'utiliser) (i, j, k) l'évènement : "la boule tirée au premier tirage porte le numéro i , la boule tirée au deuxième tirage porte le numéro j , et la boule tirée au troisième tirage porte le numéro k ", on a :

$$"X_4 = 3" = (1, 1, 1) \text{ et donc } p(X_4 = 3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

$$"X_4 = 4" = (1, 1, 2) \cup (1, 2, 1) \cup (2, 1, 1) \text{ et } p(X_4 = 4) = 3 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

$$"X_4 = 5" = (1, 1, 3) \cup (1, 3, 1) \cup (3, 1, 1) \cup (1, 2, 2) \cup (2, 1, 2) \cup (2, 2, 1)$$

Les trois premiers évènements ont pour probabilité $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, les trois suivants

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\text{On a donc } p(X_4 = 5) = \frac{3}{10}.$$

$$"X_4 = 6" = (1, 2, 3) \cup (1, 3, 2) \cup (2, 1, 3) \cup (2, 3, 1) \cup (3, 2, 1) \cup (3, 1, 2) \text{ et}$$

$$p(X_4 = 6) = 6 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

Enfin, " $X_4 = 7$ " = $(2, 2, 3) \cup (2, 3, 2) \cup (3, 2, 2)$ et $p(X_4 = 7) = 3 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Finalement, on a :

k	3	4	5	6	7
$p(X_4 = k)$	1/20	3/10	3/10	3/10	1/20

On montre que $E(X_4) = 5$, $E(X_4^2) = 26$ et $V(X_4) = 1$.

5. X_5 prend les valeurs 2,3 et 4 (en effet, en 4 tirages le minimum obtenu est $1+1+1+2=5$)

Avec des notations analogues à la question précédente, on a : " $X_5 = 2$ " = $(2, 3) \cup (3, 2)$
 et $p(X_5 = 2) = 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

" $X_5 = 3$ " =
 $(1, 2, 2) \cup (2, 1, 2) \cup (2, 2, 1) \cup (1, 1, 3) \cup (1, 3, 1) \cup (3, 1, 1) \cup (1, 2, 3) \cup (1, 3, 2) \cup (2, 1, 3) \cup (3, 1, 2) \cup (2, 2, 3)$

On montre ainsi que $p(X_5 = 3) = \frac{31}{60}$.

" $X_5 = 4$ " = $(1, 1, 1, 2) \cup (1, 1, 2, 1) \cup (1, 2, 1, 1) \cup (2, 1, 1, 1) \cup (1, 1, 2, 2) \cup (1, 2, 1, 2) \cup (2, 1, 1, 2)$
 $\cup (1, 1, 1, 3) \cup (1, 1, 2, 3) \cup (1, 1, 3, 2) \cup (1, 2, 1, 3)$

On montre ainsi que $p(X_5 = 4) = \frac{7}{20}$.

Finalement, on a :

k	3	4	5
$p(X_5 = k)$	2/15	31/60	7/20

On montre que $E(X_5) = \frac{193}{60}$, $E(X_5^2) = \frac{647}{60}$ et $V(X_5) = \frac{1571}{3600}$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[[6; 15]]$.

1. X prend 10 valeurs et $\forall k \in \{6, 7, \dots, 15\}$, on a $p(X = k) = \frac{1}{10}$.

$$p(X = 7) = \frac{1}{10}.$$

$$p(X \leq 10) = p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \frac{1}{2}.$$

$$p(X > 11) = p(X = 12) + p(X = 13) + p(X = 14) + p(X = 15) = \frac{2}{5}.$$

2. $E(X) = \frac{1}{10} (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) = \frac{21}{2}$.

$$E(X^2) = \frac{1}{10} (36 + 49 + \dots + 225) = \frac{237}{2}. \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{33}{4} \text{ et } \sigma(X) = \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Exercice 5

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissement des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de trois lettres sur cinq au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de médecins parmi les quatre à recevoir une lettre au tarif urgent. X compte le nombre de succès parmi quatre expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre commun $\frac{3}{5}$ donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5}\right)$.

$$- p(A) = p(X > 0) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{609}{625}.$$

$$- p(B) = p(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}.$$

2. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, on a ici $X = \mathcal{B}\left(10, \frac{3}{5}\right)$.

$$\text{D'après le cours, on a } E(X) = 10 \times \frac{3}{5} = 6 \text{ et } V(X) = 10 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}.$$

3. Dans cette question, on a ici $X = \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{5}\right)$.

On cherche n tel que $p(x \geq 1) \leq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow p(X = 0) \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{2}{5} \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 2/5} \Leftrightarrow n \geq 6.$$

L'entreprise doit envoyer ce courrier publicitaire à au moins six médecins.

Exercice 6

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boulons tombant sur la tranche. X compte le nombre de succès de 10 épreuves aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre commun 0,2 donc X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(10; 0,2)$.

On a donc, pour $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$: $p(X = k) = \binom{10}{k} 0,2^k \times 0,8^{10-k}$.

On a $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$ donc en moyenne, 2 boulons sur les 10 tombent sur la tranche.

On cherche n tel que $p(X \geq 1) \geq 0,999$, soit $1 - p(X = 0) \geq 0,999$.

On résout cette inéquation et on trouve $n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,8} = 30,96$ arrondi à 10^{-2} .

Eric doit donc lancer 31 boulons pour être sûr à 99,9% qu'au moins un boulon tombe sur la tranche.

Exercice 7

1. X compte le nombre de "succès" de 12 épreuves aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre commun 0,065 donc X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(12; 0,065)$.

2. $p(X = 2) = \binom{12}{2} 0,065^2 \times 0,935^{10} = 0,1424$ arrondi à 10^{-4} .

La probabilité que deux pneus présentent des défauts est égale à environ 0,1424.

3. $p(X = 0) = \binom{12}{0} 0,065^0 \times 0,935^{12} = 0,4464$ arrondi à 10^{-4} .

La probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut est égale à environ 0,4464.

4. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$.

Or, $p(X = 1) = \binom{12}{1} 0,065^1 \times 0,935^{11} = 0,3724$ arrondi à 10^{-4} .

On a donc $p(X \leq 2) = 0,1424 + 0,4464 + 0,3724 = 0,9612$ arrondi à 10^{-4} .

La probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut est égale à environ 0,9612.

5. Soit Y le nombre de pneus ayant un défaut sur les 4 que le garagiste choisit.

De même que pour X , Y suit une loi binômiale $\mathcal{B}(4; 0,065)$.

On a donc $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,935^4 = 0,2357$ arrondi à 10^{-4} .

Donc $p(Y \geq 1) \leq \frac{1}{4}$ donc il y a moins d'une chance sur 4 qu'au moins un des pneus ait un défaut.

Exercice 8

Pour une machine donnée, on appelle P l'évènement "la machine est en panne" et H l'évènement "la machine est hors d'usage".

1. Les évènements P et $\bar{P}$ constituent une partition de l'univers :
on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(H) = p_P(H) \times p(P) + p_{\bar{P}}(H) \times p(\bar{P}) = 0,75 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 = 0,505.$$

La probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage est de 0,505.

2. On cherche $p_H(\bar{P}) = \frac{p(\bar{P} \cap H)}{p(H)} = \frac{p_{\bar{P}}(H) \times p(\bar{P})}{p(H)} = \frac{0,7 \times 0,4}{0,505} = \frac{56}{101}$.

La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est de $\frac{56}{101}$.

3. X compte le nombre de "succès" de 10 épreuves aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre commun 0,505. Donc X est une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,505)$.

D'après le cours, on a :

$$\text{— } \forall k \in \{0, 1, \dots, 10\}, p(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,505^k \times 0,495^{10-k}$$

$$\text{— } E(X) = 10 \times 0,505 = 5,05$$

$$\text{— } V(X) = 10 \times 0,505 \times 0,495 = 2,49975$$

$$\text{— } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,5811 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

4. $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,505^5 \times 0,495^5 = 0,2460$ arrondi à 10^{-4} .

Exercice 9 (*)

On note X la variable aléatoire égale au nombre de clefs qu'il lui faut essayer avant de mettre le contact.

X prend des valeurs entières entre 1 et $n - 1$.

On nomme, pour $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, A_i l'évènement : "Thierry trouve une clé qui lui permet de démarrer au bout de l'essai i . Il est immédiat que $p(X = 1) = p(A_1) = \frac{2}{n}$.

$$p(X = 2) = p(\bar{A}_1 \cap A_2) = p(A_2 | \bar{A}_1) \times p(\bar{A}_1) = \frac{2}{n-1} \times \frac{n-2}{n} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

$$p(X = 3) = p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = p(A_3 | \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \times p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{2}{n-2} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

On montre de même que pour $1 \leq k \leq n - 1$, on a $p(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k p(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)}$$

$$E(X) = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} nk - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$\text{On a donc } E(X) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2 2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} nk^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right)$$

$$E(X^2) = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{2}{n-1} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2$$

$$E(X^2) = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)}{6}.$$

$$\text{Finalement, } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{(n-2)(n+1)}{18}.$$

Exercice 10 (*)

1. Pour $n > 0$, on appelle X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de points obtenus au cours de n lancers. X_n compte le nombre de succès de n expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes et de paramètre commun $\frac{1}{2}$ donc X_n est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On appelle A_n l'évènement : "la somme des points obtenus au cours de n lancers est un multiple de 3".

A_n est l'union disjointe des évènements $X_n = 0, X_n = 3, \dots, X_n = 3E\left(\frac{n}{3}\right)$.

On a donc $p(A_n) = \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. soit $j = e^{i\pi/3}$: on sait

que $1 + j + j^2 = 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, j^{3n} = 1, j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = j^2$.

$$— (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots$$

$$— (1+j)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}j + \binom{n}{2}j^2 + \binom{n}{3}j^3 + \dots$$

$$— (1+j^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}j^2 + \binom{n}{2}j^4 + \binom{n}{3}j^6 + \dots$$

En sommant ces lignes, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}$$

On a $j^2 = \bar{j}$ donc $1 + j^2 = 1 + \bar{j} = \overline{1 + j}$ et donc

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = (1+j)^n + (1+j)^n = 2\operatorname{Re}(1+j)^n.$$

Enfin, $1 + j = -j^2 = e^{7i\pi/3}$ et $(1+j)^n = e^{7in\pi/3} = e^{in\pi/3}$

On a donc $(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et :

$$p(A_n) = \frac{1}{3} + \frac{\cos(n\pi/3)}{3 \times 2^{n-1}}.$$

2. $\cos(n\pi/3)$ est borné donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{3 \times 2^{n-1}} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = \frac{1}{3}$.

Exercice 11

1. La somme de toutes les probabilités de ce tableau doit être égale à 1 et donc

$$p[(X, Y) = (1, 1)] = \frac{16}{81}.$$

2. En sommant les lignes du tableau, on a :

k	0	1	2
$p(X = k)$	4/9	4/9	1/9

En sommant les colonnes du tableau, on s'aperçoit que la loi de Y est la même que celle de X .

3. On montre facilement que $\forall (i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$, $p[(X, Y) = (i, j)] = p(X = i) \times p(Y = j)$ donc X et Y sont indépendantes.

4. $X + Y$ prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

$$\text{— } p(X + Y = 0) = p[(X, Y) = (0, 0)] = \frac{16}{81}.$$

$$\text{— } p(X + Y = 1) = p[(X, Y) = (0, 1) \cup (X, Y) = (1, 0)] = p[(X, Y) = (1, 0)] + p[(X, Y) = (0, 1)] = \frac{32}{81}$$

$$\text{— } p(X + Y = 2) = p[(X, Y) = (0, 2) \cup (X, Y) = (1, 1) \cup (X, Y) = (2, 0)] = p[(X, Y) = (0, 2)] + p[(X, Y) = (1, 1)] + p[(X, Y) = (2, 0)] = \frac{24}{81}$$

$$\text{— } p(X + Y = 3) = p[(X, Y) = (1, 2) \cup (X, Y) = (2, 1)] = p[(X, Y) = (1, 2)] + p[(X, Y) = (2, 1)] = \frac{8}{81}$$

$$\text{— } p(X + Y = 4) = p[(X, Y) = (2, 2)] = \frac{1}{81}.$$

Finalement, on a :

k	0	1	2	3	4
$p(X + Y = k)$	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2E(X) = \frac{4}{3}.$$

$$E[(X + Y)^2] = 0 + 1 \times \frac{32}{81} + 4 \times \frac{24}{81} + 9 \times \frac{8}{81} + 16 \times \frac{1}{81} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{On a donc } V(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 = \frac{8}{9}.$$

Remarque : on aurait pu voir que $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{3}\right)$ et retrouver ainsi directement les deux résultats précédents.

Exercice 12 (*)

1. Y_i prend les valeurs 0 et 1, comme les X_i .

$p(Y_i = 1) = p[(X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1)] = p(X_i = 1) \times p(X_{i+1} = 1)$ car les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On a donc $p(Y_i = 1) = p^2$ et donc $p(Y_i = 0) = 1 - p^2$ et Y_i est une loi de Bernoulli de paramètre p^2 .

$$2. E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = np^2.$$

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n v(Y_i) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(Y_i, Y_j).$$

Soit $i < j$: $\text{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i) E(Y_j)$

$Y_i Y_j$ est une variable aléatoire de Bernoulli donc

$$E(Y_i Y_j) = p(Y_i Y_j = 1) = p[(X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1) \cap (X_j = 1) \cap (X_{j+1} = 1)]$$

Deux cas se présentent :

— Si $j \neq i + 1$ alors les quatre variables aléatoires X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1} sont indépendantes et $E(Y_i Y_j) = p^4$, et $\text{cov}(Y_i, Y_j) = p^4 - p^2 \times p^2 = 0$.

— Si $j = i + 1$ alors $E(Y_i Y_j) = p^3$ et $\text{cov}(Y_i, Y_j) = p^3 - p^2 \times p^2 = p^3(1 - p)$.

$$\text{On a donc } V(S_n) = \sum_{i=1}^n p^2(1 - p^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n, j=i+1} p^3(1 - p)$$

$$\text{Donc } V(S_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p) = p^2(1 - p)(n + 3np - 2p).$$

Exercice 13

1. Y prend les valeurs 0,1 et 4 et on a :

k	0	1	4
$p(Y = k)$	1/6	1/2	1/3

$X \setminus Y$	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

2. On a, par exemple, $p[(X = 2) \cap (Y = 0)] = 0 \neq p(X = 2) \times p(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

On montre facilement que $E(X) = 0$ et $E(Y) = \frac{11}{6}$.

D'après la loi conjointe de XY établie à la question 1., XY prend seulement les valeurs -8, -1, 0, 1 et 8 et on connaît les probabilités correspondantes :

k	-8	-1	0	1	8
$p(XY = k)$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6

On a donc $E(XY) = -8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{6} = 0$.

Finalement, $\text{cov}(X, Y) = 0 - 0 \times \frac{11}{6} = 0$.

X et Y ne sont pas indépendantes, et pourtant leur covariance est nulle.

Exercice 14

Soit Ω l'ensemble de toutes les commissions possibles : on a $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{3}$.

Toutes les compositions de commission étant équiprobables, on aura, pour tout évènement A , $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. Une entreprise emploie 10 salariés : 3 ingénieurs, 2 secrétaires et 5 techniciens supérieurs. La direction désigne au hasard trois personnes pour participer à la commission "hygiène, sécurité et environnement". X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de secrétaires et Y la variable aléatoire donnant le nombre d'ingénieurs participant à cette commission.

1. X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 et Y peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

— l'évènement $(X = 0) \cap (Y = 0)$ signifie que les trois personnes choisies sont des

techniciens supérieurs, donc $p[(X, Y) = (0, 0)] = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$;

— l'évènement $(X = 1) \cap (Y = 0)$ signifie que l'on choisit une secrétaire parmi deux et

deux techniciens supérieurs parmi cinq, donc $p[(X, Y) = (1, 0)] = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$;

— $p[(X, Y) = (2, 0)] = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{24}$;

$$\begin{aligned}
- p[(X, Y) = (0, 1)] &= \frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}; \\
- p[(X, Y) = (1, 1)] &= \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}; \\
- p[(X, Y) = (2, 1)] &= \frac{\binom{2}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{40}; \\
- p[(X, Y) = (0, 2)] &= \frac{\binom{3}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{8}; \\
- p[(X, Y) = (1, 2)] &= \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{20}; \\
- p[(X, Y) = (2, 2)] &= 0 \text{ (évènement impossible);} \\
- p[(X, Y) = (0, 3)] &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}; \\
- p[(X, Y) = (1, 3)] &= 0 \text{ (évènement impossible);} \\
- p[(X, Y) = (2, 3)] &= 0 \text{ (évènement impossible).}
\end{aligned}$$

En résumé :

$X \setminus Y$	0	1	2	3	$p(X = \dots)$
0	1/12	1/4	1/8	1/120	7/15
1	1/6	1/4	1/20	0	7/15
2	1/24	1/40	0	0	1/15
$p(Y = \dots)$	7/24	21/40	7/40	1/120	1

2. On montre facilement que $E(X) = \frac{3}{5}$ et $E(Y) = \frac{9}{10}$. XY prend uniquement les valeurs 0, 1 et 2 et en utilisant la loi conjointe du couple, on a :

$$- p(XY = 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{27}{40}$$

$$- p(XY = 1) = \frac{1}{4}$$

$$- p(XY = 2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}$$

On en déduit que $E(XY) = \frac{2}{5}$, puis $\text{cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{7}{50}$.

On montre facilement que $E(X^2) = \frac{11}{15}$ puis que $V(X) = \frac{28}{15}$

De même, $E(Y^2) = \frac{13}{10}$ puis que $V(Y) = \frac{49}{100}$.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-7/50}{\sqrt{28/75} \times 7/10} = -\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Exercice 15

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, donc pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, on a $p[(X_1 = i) \cap (X_2 = j)] = p(X_1 = i) \times p(X_2 = j)$:

$X_1 \setminus X_2$	1	2	3
1	1/9	1/6	1/18
2	1/6	1/4	1/12
3	1/18	1/12	1/36

2. S prend les valeurs 2, 3, 4, 5 et 6.

$$— p(S = 2) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)] = \frac{1}{9}.$$

$$— p(S = 3) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)] + p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)] = \frac{1}{3}.$$

$$— p(S = 4) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)] + p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)] + p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)] = \frac{13}{36}.$$

$$— p(S = 5) = p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)] + p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)] = \frac{1}{6}.$$

$$— p(S = 6) = p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 3)] = \frac{1}{36}.$$

En résumé :

k	2	3	4	5	6
$p(S = k)$	1/9	1/3	13/36	1/6	1/36

D prend les valeurs -2, -1, 0, 1 et 2.

$$— p(D = -2) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)] = \frac{1}{18}.$$

$$— p(D = -1) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)] + p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)] = \frac{1}{4}.$$

$$— p(D = 0) = p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)] + p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)] + p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 3)] = \frac{7}{18}.$$

$$— p(D = 1) = p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)] + p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)] = \frac{1}{4}.$$

$$— p(D = 2) = p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)] = \frac{1}{18}.$$

En résumé :

k	-2	-1	0	1	2
$p(D = k)$	1/18	1/4	7/18	1/4	1/18

3. $E(SD) = E[(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)] = E(X_1^2 - X_2^2) = E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0$
 $cov(S, D) = E(SD) - E(S) \times E(D)$.

On montre facilement que $E(S) = \frac{33}{9}$ et $E(D) = 0$

Or, $E(SD) = 0$ donc $cov(S, D) = -E(S)E(D) = 0$.

4. Par exemple,

$$p[(S = 2) \cap (D = 2)] = [(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)] = 0 \neq p(S = 2) \times p(D = 2)$$

donc les variables S et D ne sont pas indépendantes.

5. Les couples (X_1, X_2) réalisant l'évènement $|X_1 - X_2| = 1$ sont : (1,2), (2,3), (2,1) et (3,2).
 On a donc :

$$— p(S = 2 || |X_1 - X_2| = 1) = 0 \text{ (évènement impossible)}$$

$$— p(S = 3 || |X_1 - X_2| = 1) = p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)] + p[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)] = \frac{1}{3}.$$

$$— p(S = 4 || |X_1 - X_2| = 1) = 0 \text{ (évènement impossible)}$$

$$— p(S = 5 || |X_1 - X_2| = 1) = p[(X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)] + p[(X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)] = \frac{1}{6}.$$

$$— p(S = 6 || |X_1 - X_2| = 1) = 0 \text{ (évènement impossible)}$$

Exercice 16 (*)

- X compte le nombre de "succès" (nombre de 1) dans n expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre commun p donc $X = \mathcal{B}(n, p)$.
De même, $Y = \mathcal{B}(n, q)$.
- Soit $(i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, n\}^2$. On cherche $p[(X, Y) = (i, j)]$. On a deux cas :
 - si $i + j > n$ alors $p[(X, Y) = (i, j)] = 0$ (événement impossible);
 - si $i + j \leq n$ alors on a i lancers qui amènent 1 (que l'on répartit sur les n lancers), j lancers qui amènent 2 (que l'on répartit sur les $n - i$ lancers restants) et les $n - i - j$ lancers restants qui amènent 3. Donc :

$$p[(X, Y) = (i, j)] = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p^i q^j r^{n-i-j}$$

- Par exemple, $p[(X, Y) = (n, n)] = 0 \neq p(X = n) \times p(Y = n)$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 17

- X et Y étant indépendantes, pour $(i, j) \in \{0; 1\}^2$, $p[(X = i) \cap (Y = j)] = p(X = i) \times p(Y = j)$.
 U prend les valeurs 0, 1 et 2.
 V prend les valeurs -1, 0, 1.
 - $p[(U, V) = (0, -1)] = 0$ (événement impossible);
 - $p[(U, V) = (0, 0)] = p[(X = 0) \cap (Y = 0)] = (1 - p)^2$;
 - $p[(U, V) = (0, 1)] = 0$ (événement impossible);
 - $p[(U, V) = (1, -1)] = p[(X = 0) \cap (Y = 1)] = p(1 - p)$;
 - $p[(U, V) = (1, 0)] = 0$ (événement impossible);
 - $p[(U, V) = (1, 1)] = p[(X = 1) \cap (Y = 0)] = p(1 - p)$;
 - $p[(U, V) = (2, -1)] = 0$ (événement impossible);
 - $p[(U, V) = (2, 0)] = p[(X = 1) \cap (Y = 1)] = p^2$;
 - $p[(U, V) = (2, 1)] = 0$ (événement impossible).

En résumé :

$U \setminus V$	-1	0	1
0	0	$(1 - p)^2$	0
1	$p(1 - p)$	0	$p(1 - p)$
2	0	p^2	0

- Par exemple, $p[(U, V) = (0, -1)] = 0 \neq p(U = 0) \times p(V = 0)$ donc les deux variables ne sont pas indépendantes.