TD Chapitre 5 : Variables aléatoires finies

Exercice 1
On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = 2X + 3$. Déterminer la loi de de Y et calculer son espérance.
3. On pose $Z = \dfrac{1}{X}$.Déterminer la loi de de Z et calculer son espérance.

Exercice 2
Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est en état d'être louée en moyenne 4 jours sur 5, indépendamment l'une de l'autre. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega)) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$p(X = 0) = 0,1 \qquad p(X = 1) = 0,3 \qquad p(X = 2) = 0,4.$$

1. On note Z le nombre de véhicules en état d'être loué par jour. Déterminer la loi de Z.
2. On note Y la variable aléatoire "nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.On considèrera que les variables X et Z sont indépendantes.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 3 (*)
Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs, sans remise, de toutes les boules de l'urne. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance ;

1. X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne après le troisième tirage.
2. X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.
3. X_3 est le rang de tirage de la boule numérotée 3.
4. X_4 est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages.
5. X_5 est le nombre de tirages nécessaires avant que la somme des numéros obtenus n'atteigne (ou dépasse) 5.

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![6;15]\!]$.

1. Calculer $P(X = 7)$, $P(X \leqslant 10)$ et $P(X > 11)$.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

Exercice 5
Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissement des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de trois lettres sur cinq au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins. Quelle est la probabilité des événements :
   — A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   — B : "Exactement deux médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent."
2. Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi dix lettres". Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?
3. Déterminer le nombre minimal de médecins à qui l'entreprise envoie un courrier publicitaire afin que la probabilité qu'il y ait au moins un médecin ayant reçu une lettre au tarif urgent soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 6
Éric s'amuse à lancer des boulons sur le sol du labo de SI. On sait que la probabilité qu'un boulon reste sur la tranche est de 0,2.
En lançant 10 boulons, quelle est la probabilité que k boulons restent sur la tranche ? Quel est le nombre moyen de boulons sur la tranche ?
Combien de boulons faudra-t-il qu'Éric lance pour qu'il soit sûr à 99,9 % qu'au moins un des boulons lancés reste sur la tranche ?

Exercice 7
Un garagiste choisit douze pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de douze pneus à un tirage indépendant avec remise de douze pneus. On sait que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de douze pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.
On arrondira tous les résultats à 10^{-4} près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'exactement deux pneus aient un défaut.
3. Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut.
4. Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut.
5. Est-il vrai que si le garagiste change les 4 pneus d'une voiture, alors, il y a plus d'une chance sur quatre qu'au moins un des pneus ait un défaut ? On justifiera avec soin la réponse.

Exercice 8
Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30 % la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans. Parmi ces dernières années, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75 %. Cette probabilité est de 40 % pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire "nombre de machines de plus de cinq ans qui seront hors d"usage , parmi les dix machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P(X=5)$.

Exercice 9 (*)
Thierry le braqueur est assis au volant de la Ferrari qu'il doit voler pour accomplir son dernier contrat. Il a déposé près de lui le trousseau de n ($n \geqslant 2$) clefs dont deux seulement peuvent lui permettre de démarrer. Il les essaie calmement une par une, au hasard, en écartant au fur et à mesure celles qui ne conviennent pas.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de clefs qu'il lui faut essayer avant de mettre le contact.
Établir la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance et sa variance.
(on rappelle que : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$)

Exercice 10 (*)
On lance n fois une pièce de monnaie non truquée dont les deux faces sont numérotées respectivement 0 et 1.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que la somme des numéros obtenus au cours de ces n lancers soit un multiple de 3 ?
2. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 11
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$
1	$\frac{16}{81}$	?	$\frac{4}{81}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X,Y)=(1,1)$.

2. Calculer les lois marginales de X et de Y.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $X+Y$.

Exercice 12 (*)
Soit $(X_i$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes mutuellement. On note, pour tout $i \geqslant 0$, $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?

2. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Exercice 13
Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. On note $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X,Y).

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\text{cov}(X,Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 14
Une entreprise emploie 10 salariés : 3 ingénieurs, 2 secrétaires et 5 techniciens supérieurs. La direction désigne au hasard trois personnes pour participer à la commission "hygiène, sécurité et environnement". X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de secrétaires et Y la variable aléatoire donnant le nombre d'ingénieurs participant à cette commission.

1. Donner la loi conjointe du couple (X,Y) ainsi que les lois marginales de X et de Y.

2. Calculer la covariance de (X,Y) ainsi que son coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 15
On lance un dé rouge et un dé bleu, à 6 faces et parfaitement équilibrés, sur lesquels figurent le nombre 1 sur deux faces, le nombre 2 sur trois faces et le nombre 3 sur une face. On note X_1 le résultat lu sur le dé rouge, X_2 le résultat lu sur le dé bleu, $S = X_1 + X_2$ et $D = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

2. Déterminer la loi de S et la loi de D.

3. Que vaut $E\left[(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)\right]$? En déduire $\text{cov}(S,D)$.

4. Les variables S et D sont -elles indépendantes ?
5. Calculer la loi de S conditionnée par l'événement $|X_1 - X_2| = 1$.

Exercice 16 (*)
Soit n un entier naturel non nul et p et q des nombres réels de l'intervalle $]0;1[$ tels que $p+q<1$. On jette n fois un dé pipé dont les six faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3 et on suppose les lancers indépendants.
A chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q et celle d'obtenir 3 est $r = 1-p-q$.
On appelle X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (respectivement de 2) obtenus en n lancers.

1. Quelles sont les lois respectives de X et Y ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant un loi de Bernoulli de même paramètre p.
On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Calculer la loi du couple (U, V).
2. Les deux variables sont -elles indépendantes ?