TD Chapitre 6 : Intégration

Exercice 1

1. $A = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$: A est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
A est du type $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ avec $\alpha > 0$ donc A est convergente.
Soit $X > 0$: $\int_0^X e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^X = 1 - e^{-X}$
$A = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-t} dt = \lim\limits_{X \to +\infty} 1 - e^{-X} = 1$.

2. $B = \int_0^{+\infty} 1 \, dt$: B est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto 1$ est continue sur $[1; +\infty[$.
Soit $X > 0$: $\int_0^X 1 \, dt = [t]_0^X = X$ avec $\lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$ donc B diverge vers $+\infty$.

3. $C = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$: C est une intégrale impropre en 1.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue et positive sur $[0; 1[$.
On pose $u = 1 - t$: $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = u^{-1/2}$ donc l'intégrale C est une intégrale de Riemann convergente.
Soit $X > 0$: on cherche $\lim\limits_{X \to 1} \int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$.
$\int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^X = -2\sqrt{1-X} + 2$. $C = \lim\limits_{X \to 1} \int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim\limits_{X \to 1} -2\sqrt{1-X} + 2 = 2$.

4. $D = \int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$: D est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$.
$\frac{t}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc D est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.
Soit $X > 0$: on cherche $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
$\int_1^X \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_1^X = -\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{1+X^2} - \frac{1}{2}\right]$
$D = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{1+X^2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$.

5. $E = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$: E est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto t e^{-t}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$.
On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^3 e^{-t} = 0$ donc, pour t assez grand, $t^3 e^{-t} < 1$ et $t e^{-t} < \frac{1}{t^2}$.
E est donc une intégrale convergente par théorème de comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.
Soit $X > 0$: on cherche $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0, X]$ donc, d'après la formule d'IPP, on a :

$\int_0^X t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^X + \int_0^X \mathrm{e}^{-t} = -X\mathrm{e}^{-X} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^X = -X\mathrm{e}^{-X} - \mathrm{e}^{-X} + 1.$

$E = \lim_{X\to+\infty} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} X\mathrm{e}^{-X} - \mathrm{e}^{-X} + 1 = 1$

6. $F = \int_{-\infty}^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$: F est une intégrale impropre en $-\infty$.
La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et négative sur $]-\infty;0]$.
$\lim_{t\to-\infty} \left|t^3\mathrm{e}^{-t^2}\right| = 0$ donc, pour t assez petit, on a $\left|t\mathrm{e}^{-t^2}\right| < \frac{1}{t^2}$.
F est une intégrale absolument convergente (par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente) donc F est convergente.
Soit $X < 0$: on cherche $\lim_{X\to-\infty} \int_X^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Or, $\int_X^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_X^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-X^2}$.
Donc $F = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-X^2} = -\frac{1}{2}$

7. $G = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$: G est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto t\frac{t}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$.
$\frac{t}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc G est une intégrale divergente par équivalence avec une intégrale de Riemann divergente.

8. $H = \int_\pi^{+\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$: H est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $x \mapsto 2 - \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[\pi;+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2$ donc H est une intégrale grossièrement divergente.

9. $I = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$: I est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto \frac{t}{t\ln t}$ est continue sur $[2;+\infty[$.
Soit $X > 0$: on cherche $\lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.
$\int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \left[\ln(\ln(t))\right]_2^X = \ln(\ln X) - \ln\ln 2$
$I = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \lim_{X\to+\infty} \ln(\ln X) - \ln\ln 2 = +\infty.$
I est une intégrale divergente vers $+\infty$.

10. $J = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)}$: J est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto \frac{t}{t\ln t\ln(\ln t)}$ est continue sur $[2;+\infty[$.
Soit $X > 0$: on cherche $\lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)}$.
$\int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)} = \left[\ln(\ln(\ln(t)))\right]_2^X = \ln(\ln(\ln X)) - \ln(\ln\ln 2)$
$J = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)} = \lim_{X\to+\infty} \ln(\ln(\ln X)) - \ln(\ln\ln 2) = +\infty.$
J est une intégrale divergente vers $+\infty$.

Exercice 2

1. $A = \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln t}{t+4}\mathrm{d}t$: A est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{2+\ln t}{t+4}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et positive pour t assez grand.

$\dfrac{2+\ln t}{t+4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t}$ et, pour t assez grand, $\dfrac{\ln t}{t} > \dfrac{1}{t}$ donc l'intégrale A diverge.

2. $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$: B est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

$\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc B est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

3. $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4}\mathrm{d}t$: C est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{t-5}{t^2+4t+4}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et positive pour t assez grand.

$\dfrac{t-5}{t^2+4t+4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc C est une intégrale divergente par équivalence avec une intégrale de Riemann divergente.

4. $D = \displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}\mathrm{d}t$: D est une intégrale impropre en 1.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-t}$ est continue et positive sur $]1;2]$.

$\dfrac{1}{t^2-t} \underset{1}{\sim} \dfrac{-1}{t}$ donc D est une intégrale divergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

5. $E = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$: E est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.

On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$ donc, pour t assez grand, $\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} < 1$ et $\ln t < \sqrt{t}$.

Ainsi, pour t assz grand, $\dfrac{\ln t}{t^2} < \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc E est une intégrale convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

6. $F = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$: F est une intégrale impropre en 0 et en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Pour t proche de 0^+, $\dfrac{\sin t}{t^2} > 0$.

$\sin t \underset{0}{\sim} t$ donc $\dfrac{\sin t}{t^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}$ est une intégrale divergente par équivalence avec une intégrale de Riemann divergente.

Ainsi, F est une intégrale divergente.

7. $G = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$: G est une intégrale impropre en 0 et en 1.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0;1[$.

$t-1 \underset{0}{\sim} -1$ donc $\dfrac{\ln t}{t-1} \underset{0}{\sim} -\ln t$

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale de référence convergente.

On pose $u = 1-t$: $\dfrac{\ln t}{t-1} = -\dfrac{\ln(1-u)}{u} \underset{0}{\sim} 1$

$\displaystyle\int_{1/2}^{0} \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale convergente.

Ainsi, G est une intégrale convergente et $G = \displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t + \int_{1/2}^{0} \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t$

8. $H = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$: H est une intégrale impropre en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}-t^2$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$.
Pour $t \geq 0$, on a $t \geq t^2$, et $-t^2 \geq -t$ donc $\mathrm{e}^{-t^2} < \mathrm{e}^{-t}$.
Donc H est une intégrale convergente par comparaison avec une intégrale de référence convergente.

9. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t^4+3t^2+t}} \mathrm{d}t$: I est une intégrale impropre en 0.
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}-t^2$ est continue et positive sur $]0;+1]$.
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{t^4+3t^2+t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc I est une intégrale divergente par équivalence avec une intégrale de Riemann divergente.

Exercice 3

1. $$\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right) = \frac{(t^2-t+1)-(t-2)(t+1)}{(1+t)(t^2-t+1)} = \frac{t^2-t+1-\left(t^2-t-2\right)}{1+t^3} = \frac{3}{1+t^3}$$
Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a $\displaystyle\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right)$.

2. Soit $A > 0$. $\displaystyle\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3/2}{t^2-t+1}\right)$ Les fonctions $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{1+t}, t \mapsto \frac{2t-2}{t^2-t+1}$ sont continues sur $[0;A]$.
Une primitive de $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{1+t}$ sur $[0;A]$ est $\ln(1+t)$.
Une primitive de $t \mapsto \displaystyle\frac{2t-2}{t^2-t+1}$ sur $[0;A]$ est $\ln\left(t^2-t+1\right)$.
$$\frac{3/2}{t^2-t+1} = \frac{3/2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4/3 \times 3/2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{3}+1} = \frac{2}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$
$$\frac{3/2}{t^2-t+1} = \frac{2}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \sqrt{3} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$
Ainsi, une primitive de $t \mapsto \displaystyle\frac{3/2}{t^2-t+1}$ sur $[0;A]$ est $\sqrt{3}\mathrm{Arctan}\left(\displaystyle\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$.
Finalement,une primitive de $\displaystyle\frac{1}{1+t^3}$ sur $[0;A]$ est
$$\frac{1}{3}\left(\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

3. Soit $X > 0$:

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left[\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^X$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{1+X}{\sqrt{X^2-X+1}}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2X-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$\dfrac{1+X}{\sqrt{X^2-X+1}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+X}{\sqrt{X^2-X+1}}\right) = 0$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{2X-1}{\sqrt{3}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2X-1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

En outre, $\mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ donc I est convergente et $I = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\right)$.

$$I = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Exercice 4

1. L'intégrale est une intégrale impropre en 0 et en $+\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
   On a $\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-u}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-u<1$ soit $u>0$.
   En outre, $\dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{1+v}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $v+1>1$ soit $v>0$.
   Finalement,l'intégrale $\beta(u,v)$ est convergente si et seulement si u et v sont strictement positifs.
2. Soit u et v deux réels strictement positifs. Démontrer successivement les égalités suivantes :
   a. $\beta(u+1,v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v+1}}\,\mathrm{d}t$.
   Soit $X>0$ et $0<\epsilon<X$: $\beta(u+1,v) = \displaystyle\lim_{\epsilon\to0,X\to+\infty} \int_\epsilon^X \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v+1}}\,\mathrm{d}t$
   On pose $f(t) = t^u$ et $g'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{u+v+1}}$:
   on a $f'(t) = ut^{u-1}$ et $g(t) = -\dfrac{1}{u+v} \times \dfrac{1}{(1+t)^{u+v}}$. f et g sont de classe C^1 sur $[\epsilon;X]$
   donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :
   $$\int_\epsilon^X \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v+1}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{u+v} \times \frac{t^u}{(1+t)^{u+v}}\right]_\epsilon^X + \frac{u}{u+v}\int_\epsilon^X \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}.$$
   On a $\dfrac{\epsilon^u}{(1+\epsilon)^{u+v}} \underset{0^+}{\sim} \epsilon^u$ donc $\lim\limits_{\epsilon\to0} \dfrac{\epsilon^u}{(1+\epsilon)^{u+v}} = 0$.
   On a $\dfrac{X^u}{(1+X)^{u+v}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{X^u}{X^{u+v}} = \dfrac{1}{X^v}$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^u}{(1+X)^{u+v}} = 0$.
   En passant à la limite, on a donc :
   $$\beta(u+1,v) = \frac{u}{u+v}\beta(u,v)$$

b. On remarque que $\beta(u,v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{u-1} \frac{1}{(1+t)^{v-1}} \times \frac{1}{(1+t)^2} \mathrm{d}t.$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est une bijection de classe C^1, de $]0,+\infty[$ sur $]0;1[$ et l'écriture ci-dessus permet d'affirmer que :

$$\beta(u,v) = \int_0^{+\infty} \left(1-\varphi(t)\right)^{u-1} \varphi^{v-1}(t) \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t$$

. Donc, en effectuant le changement de variable défini par $x = \varphi(t)$, on trouve :

$$\beta(u,v) = \int_0^1 (1-x)^{u-1} x^{v-1} \,\mathrm{d}x$$

c. La fonction $\varphi : t \mapsto 1-t$ est une est une bijection de classe C^1, de $]0;1[$ sur $]0;1[$ et le changement de variable défini par $y = \varphi(t)$ permet d'écrire que :
$\beta(u,v) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{u-1} x^{v-1} \,\mathrm{d}t = \int_1^0 (y)^{u-1}(1-y)^{v-1} \times (-1)\mathrm{d}y$
On a donc

$$\beta(u,v) = \beta(v,u)$$

3. a. On utilise la relation établie à la question 2.a :

$$\beta(n+1,a) = \frac{n}{n+a}\beta(n,a)$$

$$\beta(n,a) = \frac{n-1}{n-1+a}\beta(n-1,a)$$

$$\vdots$$

$$\beta(1,a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{a-1}} = \frac{1}{a}$$

On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,on a
$\beta(n+1,a) = \dfrac{n!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$

b. La fonction $t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{a-1}$ est continue, et positive sur $[0;n]$.

$\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{a-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-a}}$

Comme $1-a<1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{a-1}}$.

Donc l' intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{a-1} \,\mathrm{d}t$ converge, et par conséquent $I_n(a)$converge.

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{n}$ est une bijection de classe C^1, de $[0;n]$ sur $[0;1]$ et le changement de variable défini par $x = \varphi(t)$ permet d'écrire que :

$$I_n(a) = \int_0^1 (1-x)^n (nx)^{a-1} n\mathrm{d}x = n^a \beta(n+1,a)$$

.

$$I_n(a) = \frac{n!n^a}{a(a+1)\ldots(a+n)}$$

Exercice 5

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et négative au voisinage de $+\infty$.

$\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$ donc I est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une bijection de classe C^1 de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ et le changement de variable défini par $t = \dfrac{1}{x}$ permet d'écrire que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^2 x^2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t$$

On a donc $I = -I$ soit $I = 0$.

Exercice 6

L'intégrale I est une intégrale impropre en 0 et en $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$.

$\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$ donc, pour x assez grand, $\left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} < 1$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

Finalement, I est une intégrale convergente par somme de ces deux intégrales.

Soit $X > 0$ et $0 < \epsilon < X$: $\displaystyle\int_\epsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -2\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right]_\epsilon^X = 2\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\epsilon}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{X}}\right)$

$$I = \lim_{\epsilon\to 0, X\to+\infty} 2\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\epsilon}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{X}}\right) = 2$$

Exercice 7

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc I_0 est grossièrement divergente.

2. Soit $n > 0$. L'intégrale I_n est une intégrale impropre en $+\infty$.
   La fonction $x \mapsto \ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx} = 0$ donc, pour x assez grand, $x^2\ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx} < 1$ et $\ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx} < \dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi, l'intégrale I_n est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

3. Soit $n > 1$: la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$ donc pour tout $x > 0$ on a :
$\ln(x+n) \geq \ln n$ et $I_n \geq \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln n \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{\ln n}{n}$.

4. Pour $n > 3$,on a $\ln n > 1$ et $I_n \geq \dfrac{1}{n}$ donc le terme général de la série $\sum I_n$ est plus grand que celui de la série harmonique qui est divergente.
La série de terme général I_n est divergente.

5. **a.** Soit $X > 0$. On pose $u(x) = \ln(x+n)$, et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$.
On a donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+n}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ donc, d'après la formule d'IPP, on a :

$$\int_0^X \ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^X + \frac{1}{n}\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\mathrm{d}x$$

Donc $\displaystyle\int_0^X \ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{-\ln(X+n)}{n}\mathrm{e}^{-nX} + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\mathrm{d}x$

On sait que $\lim_{X\to+\infty} \ln(X+n)\mathrm{e}^{-nX} = 0$ donc, en passant à la limite :

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\,\mathrm{d}x$$

b. Pour $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+n} \leq \dfrac{1}{n}$ et par croissance de l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$

c. D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\,\mathrm{d}x = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ donc :
$I_n = \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$et finalement :
I_n est équivalent à $\dfrac{\ln n}{n}$ en $+\infty$.

Exercice 8

L'intégrale I est une intégrale impropre en + et en $+\infty$.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
On a $\sin t \underset{0}{\sim} t$ donc $\dfrac{\sin t}{t} \underset{0}{\sim} 1$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $X > 1$: On pose $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$.
On a donc $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe C^1 sur $[1;X]$ donc d'après la formule d'IPP, on a :

$\displaystyle\int_1^X \frac{\sin t}{t} = \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$

Pour $t \geq 1$,on a $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale absolument convergente (donc convergente) par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

$\left[\dfrac{-\cos t}{t^2}\right]_0^X = \dfrac{-\cos X}{X^2} + \cos 1.$

$t \mapsto \cos t$ est bornée sur $[1, +\infty[$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0.$

Finalement, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et I est convergente par somme.

2. **a.** Soit $t \in \mathbb{R}$: $|\sin t| \leq 1$ donc $\sin^2 t \geq \sin^4 t$ et $\sqrt{\sin^2 t} \geq \sqrt{\sin^4 t}$ soit $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

   b. Soit $x \geq 1$: pour $t > x$, on a $|\sin t| \geq \sin^2 t$ donc par croissante de l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t}\mathrm{d}t.$

   c. Soit $X \geq 1$: On pose $u'(t) = \cos 2t$ et $v(t) = \dfrac{1}{2t}$.
   On a donc $u(t) = \dfrac{\sin 2t}{2}$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$.
   Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; X]$ donc, d'après la formule d'IPP :
   $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos 2t}{2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin 2t}{4t}\right]_1^X + \int_0^X \frac{\sin 2t}{4t^2}\mathrm{d}t.$

   Comme à la question 1., on montre facilement que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   d. $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\ln x}{2} - \int_1^x \frac{\cos 2t}{2t}\mathrm{d}t.$
   D'après la question précédente, l'intégrale deuxième terme de la somme est convergente et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2} = +\infty$ donc I n'est pas absolument convergente.

3. Soit $a = 0$: il est évident que $I(a) = 0$.
   Soit$a > 0$: on montre facilement (comme à la question 1.) que $I(a)$ est une intégrale convergente.
   La fonction $\varphi : t \mapsto at$ est une bijection de classe C^1 de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$ et le changement de variable défini par $x = at$ permet d'écrire que :
   $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = I = \frac{\pi}{2}.$

   Soit $a < 0$: $t \sin t$ est impaire donc $I(-a = -I(a) = -\dfrac{\pi}{2}$.

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a > 0 \end{cases}$$

4. **a.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

On a $\sin^2 t \underset{0}{\sim} t^2$ donc $\dfrac{\sin^2 t}{t^2} \underset{0}{\sim} 1$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour tout $t \geq 1$, on a $\dfrac{\sin^2 t}{t} \geq \dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.
Finalement, J est une intégrale convergente par somme.

b. Soit $0 < \epsilon < x$.
On pose $u(t) = \sin^2 t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$.
On a donc $u'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$.
Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[\epsilon; X]$ donc d'après la formule d'IPP :

$$\int_\epsilon^x \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_\epsilon^x + \int_\epsilon^x \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

c. $\left[-\dfrac{\sin^2 t}{t}\right]_\epsilon^X = -\dfrac{\sin^2 X}{X} + \dfrac{\sin^2 \epsilon}{\epsilon}$

$t \mapsto \sin^2 t$ est bornée sur $[\epsilon; X]$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin^2 X}{X} = 0$.

$\sin^2 \epsilon \underset{0}{\sim} \epsilon^2$ donc $\dfrac{\sin^2 \epsilon}{\epsilon} \underset{0}{\sim} \epsilon$ et $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin^2 \epsilon}{\epsilon} = 0$.

$J = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0, X\to+\infty} \int_\epsilon^x \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$
Donc, d'après la question 2., on a $J = I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 9

1. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$, elle est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$.
On a $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \ln t$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente par équivalence avec une intégrale de référence convergente.
On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$ donc pour t assez grand, $\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} < 1$ et $\ln t < \sqrt{t}$.
On a donc, pour t assez grand, $\dfrac{\ln t}{1+t^2} < \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^{3/2}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est donc convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.
Finalement, l'intégrale est convergente et
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$
La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
On pose $u = \dfrac{1}{t}$ donc $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\ln u}{1+\dfrac{1}{u^2}} \times -\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

2. L'intégrale est impropre en a et b.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ est continue et positive sur $]a;b[$.
Convergence en a : on a $\dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{(b-a)(x-a)}}$.
On pose $u = x-a$: $\dfrac{1}{\sqrt{(b-a)(x-a)}} = \dfrac{1}{\sqrt{(b-a)u}}$ donc cette intégrale est équivalente à une intégrale de Riemann convergente : elle est convergente.
On prouve de même que l'intégrale est convergente en b.
La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{a+b}{2} + u\dfrac{b-a}{2}$ est une bijection de classe C^1 de $]a,b[$ sur $]0,+\infty[$.
On pose $x = \dfrac{a+b}{2} + u\dfrac{b-a}{2}$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{2}\mathrm{d}t$.

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(b-a)(1-u)}{2} \times \dfrac{(b-a)(1+u)}{2}}} \times \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Soit $\alpha > -1$ et $\beta < 1$: $= \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-u^2}} = [\text{Arcsin } t]_\alpha^\beta = \text{Arcsin } \alpha - \text{Arcsin } \beta$

Or, $= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-u^2}} = \lim_{\alpha\to-1,\beta\to1} \text{Arcsin } \alpha - \text{Arcsin } \beta = \pi$

3. L'intégrale est impropre en 0 et en 1.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}$ est continue et négative sur $]0;1[$.
On a $\dfrac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-t^2}{t^2} = -1$ donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}$ est convergente.

On a $\dfrac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2} \underset{0}{\sim} \ln(2(1-t))$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}$ est convergente par équivalence avec une intégrale de référence convergente.
La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une bijection de classe C^1 de $]0;1[$ sur $]1;+\infty[$.

On pose $u = \dfrac{1}{t}$ donc $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

Soit $\epsilon > 1$ et $X > \epsilon$: $\displaystyle\int_\epsilon^X \ln\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_\epsilon^X \ln\left(u^2\right)\mathrm{d}u - \int_\epsilon^X \ln\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u$ Une intégration par parties pour chacune de ces intégrales fournit :

$$\int_\epsilon^X \ln\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = [(u+1)\ln(u+1) - u + (u-1)\ln(u-1) - u - 2u\ln u + 2u]_\epsilon^X$$

$$\int_\epsilon^X \ln\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = (X+1)\ln(X+1) + (X-1)\ln(X-1) - 2X\ln X - 2\ln 2 - (\epsilon-1)\ln(\epsilon-1) + 2\epsilon\ln\epsilon$$

$$\lim_{\epsilon\to 1}(\epsilon-1)\ln(\epsilon-1)+2\epsilon\ln\epsilon=0$$

$$\begin{aligned}(X+1)\ln(X+1)+(X-1)\ln(X-1)-2X\ln X &= (X+1)\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)+(X-1)\ln\left(1-\frac{1}{X}\right)\\ &= (X+1)\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)+(X-1)\left(-\frac{1}{X}-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{X\to+\infty}(X+1)\ln(X+1)+(X-1)\ln(X-1)-2X\ln X=0$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}=\lim_{\epsilon\to 1, X\to+\infty}\int_\epsilon^X \ln\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=-2\ln 2$.

4. L'intégrale est impropre en 1.

La fonction $t\mapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[0;1[$. On pose $u=1-t$:

$\dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{(1-u)^3}{\sqrt{2u}}$ donc l'intégrale est convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

La fonction $\varphi : u\mapsto \sin u$ est une bijection de classe C^1 de $[0;1[$ dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On pose $t=\sin u$: on a $\mathrm{d}t=\cos u\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\times\cos u\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\sin^3 u\mathrm{d}u.$

$\sin^3 u=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}}\right)^3=-\dfrac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}u}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}u}\right)$

$\sin^3 u=-\dfrac{1}{4}\sin(3u)+\dfrac{3}{4}\sin u$. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3 u\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{12}\cos(3u)-\frac{3}{4}\cos u\right]_0^{\pi/2}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$.

Exercice 10

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^n}$.

1. L'intégrale I_n est une intégrale impropre en $+\infty$.

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

On a $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2n}}$ donc I_n est convergente par équivalence avec une intégrale de Riemann convergente.

2. $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\lim_{X\to+\infty}[\operatorname{Arctan} X]_0^X=\frac{\pi}{2}$.

3. On a $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n}=\dfrac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)^n}-\dfrac{t^2}{\left(1+t^2\right)^n}$ donc l'égalité est évidente puisque toutes les intégrales impropres correspondantes convergent.

4. Soit $n \geq 2$ et $X > 0$:on calcule $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^n}$

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^n} = \int_0^X \frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)^n} - \int_0^X \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^n}$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{\left(1+t^2\right)^n}$:

On a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\dfrac{1}{2(n-1)\left(1+t^2\right)^{n-1}}$

On a donc $\displaystyle\int_0^X \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^n} = \left[-\frac{t}{2(n-1)\left(1+t^2\right)^{n-1}}\right]_0^X + \frac{1}{2(n-1)}\int_0^X \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}\mathrm{d}t.$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on trouve $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$ soit $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

5. On montre facilement par récurrence que $I_n = \dfrac{(2n-3)(2n-5)\ldots1}{(2n-2)(2n-4)\ldots2} I_1$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $(2n-2)(2n-4)\ldots2)$ et comme $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^2(n-1)^2 \times 2^2(n-2)^2 \ldots . 2^2}\frac{\pi}{2} \text{ soit } I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}$$