TD Chapitre 6 : Intégration

Exercice 1
Étudier la convergence des intégrales suivantes, et calculer leur valeur dans les cas de convergence.

1. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$
2. $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1 \,\mathrm{d}t$
3. $C = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$
4. $D = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$
5. $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$
6. $F = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$
7. $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$
8. $H = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left(2-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$
9. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ **(*)**
10. $J = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)}$ **(*)**

Exercice 2
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln t}{t+4}\mathrm{d}t$
2. $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
3. $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{t^2+4t+4}\mathrm{d}t$
4. $D = \displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}\mathrm{d}t$
5. $E = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$
6. $F = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$
7. $G = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$
8. $H = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$
9. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^4+3t^2+t}}\mathrm{d}t$

Exercice 3
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$

1. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{t-2}{t^2-t+1}\right)$.
2. Soit $A > 0$. En déduire qu'une primitive de $\dfrac{1}{1+t^3}$ sur $[0;A]$ est
$$\frac{1}{3}\left(\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$
3. En déduire que I est convergente et calculer I.

Exercice 4(*)

Soit u et v deux réels.

1. Montrer que l'intégrale $\beta(u,v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si u et v sont strictement positifs.
2. Soit u et v deux réels strictement positifs. Démontrer successivement les égalités suivantes :
   a. $\beta(u+1,v) = \frac{u}{u+v}\beta(u,v)$
   b. $\beta(u,v) = \int_0^1 (1-t)^{u-1}\,t^{v-1}\,\mathrm{d}t$
   c. $\beta(u,v) = \beta(v,u)$
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta(n+1,a) = \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'intégrale $I_n(a) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente, et calculer sa valeur.

Exercice 5

Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ converge, puis montrer que $I = 0$.

On pourra faire le changement de variables $t = \frac{1}{x}$.

Exercice 6

Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, puis montrer que $I = 2$.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \ln(x+n)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est divergente.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, I_n est convergente.
3. Montrer que pour tout $n > 1$, on a $I_n \geq \frac{\ln n}{n}$.
4. Étudier la nature de la série de terme général I_n.
5. **a.** Montrer que $I_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\,\mathrm{d}x$.
   b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x+n}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n^2}$.
   c. En déduire que I_n est équivalent à $\frac{\ln n}{n}$ en $+\infty$.

Exercice 8(*)

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente
2. **a.** Justifier que pour tout $t \geq 1$, on a $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

   b. En déduire que pour tout $x \geq 1$, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\, \mathrm{d}t$.

   c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   d. En déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.
3. On admet que $I = \dfrac{\pi}{2}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad a > 0 \end{cases}$
4. **a.** Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   b. Soit $0 < \epsilon < x$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_\epsilon^x \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_\epsilon^x + \int_\epsilon^x \frac{\sin(2t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

   c. En déduire que $J = I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 9

Pour chacune des intégrales suivantes, établir la convergence et les calculer.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \left(u = \frac{1}{t}\right)$.
2. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\, \mathrm{d}x \left(x = \frac{a+b}{2} + u\frac{b-a}{2}\right)$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\, \mathrm{d}t \left(u = \frac{1}{t}\right)$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t\ (t = \sin u)$.

Exercice 10(*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^n}$.

1. Montrer que I_n est une intégrale convergente.
2. Calculer I_1.
3. Pour $n \geq 2$, montrer que $I_n = I_{n-1} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^n}\, \mathrm{d}t$
4. En déduire que $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$.
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\,((n-1)!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.