Calcul Intégral

1 Recherche de primitives

1.1 Les classiques

Il s'agit ici de lire le tableau des dérivées à l'envers. On doit prendre garde aux constantes multiplicatives qui peuvent apparaître, et on utilise souvent les formules $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(e^u)' = u'e^u$, $(\cos u)' = -u' \sin u$, ... On peut aussi être amené à utiliser la formule d'intégrations par parties, comme pour déterminer une primitive de $\ln x$ par exemple.

— On pourra dériver la primitive trouvée pour vérifier ses calculs

— Bien penser que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Exemple : Calculer $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt$.

En posant $u(t) = t^2 + 1$, on a $u'(t) = 2t$ et $\frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2+1}$.

On a donc $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} [\ln |t^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$	$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$	$I_3 = \int_1^2 \frac{dx}{x^3}$
$I_4 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$I_5 = \int_0^{\pi/4} \tan x dx$	$I_6 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
$I_7 = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x^4+4x+1} dx$	$I_8 = \int_0^1 2e^{5x+1} dx$	$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$

1.2 Les fonctions trigonométriques

On cherche ici des primitives de fonctions du type $P(\cos ax, \sin ax)$ où P est un polynôme. La méthode consiste à linéariser l'expression avant d'en calculer facilement l'intégrale, ou bien à repérer une forme $u' \times u$

Exemple : Calculer $\int_0^\pi \cos^2 t dt$.

On sait que $\cos^2 t = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$ donc

$$\int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \int_0^\pi \frac{\cos(2t)}{2} dt + \int_0^\pi \frac{1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Exemple : Calculer $\int_0^{\pi/4} \cos t \sin t dt$.

$\cos t \sin t$ est de la forme $u'(t) \times u(t)$ avec $u(t) = \sin t$ donc une primitive de cette fonction

sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ est $\frac{\sin^2 t}{2}$ donc :

$$\int_0^{\pi/4} \cos t \sin t dt = \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi \cos^2 t \sin^2 t dt, \quad I_2 = \int_0^{\pi/3} \cos^3 t \sin t dt, \quad I_3 = \int_0^{\pi/6} \cos^4 t \sin^2 t dt.$$

1.3 Les produits polynômes-exponentielle

On cherche ici des primitives de fonctions du type $P(x)e^{\lambda x}$ où P est un polynôme à coefficients réels (ou complexes) de degré n et λ est une constante réelle (ou complexe).

On dispose de deux méthodes :

- Méthode 1 : on utilise la formule d'intégration par parties (plusieurs fois...).
On cherche à dériver le polynôme.
- Méthode 2 : on affirme connaître la forme d'une primitive.
On peut montrer qu'une primitive de $P(x)e^{\lambda x}$ est du type $Q(x)e^{\lambda x}$ où Q est un polynôme de même degré que P .

Exemple : Calculer $I = \int_0^1 (t^2 + 1)e^{t/2} dt$.

— Méthode 1 :

On pose $u(t) = t^2 + 1$ et $v'(t) = e^{t/2}$. On a donc $u'(t) = 2t$ et $v(t) = 2e^{t/2}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on utilise la formule d'IPP :

$$I = [2(t^2 + 1)e^{t/2}]_0^1 - 4 \int_0^1 te^{t/2} dt = 4e^{1/2} - 2 - 4J.$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{t/2}$. On a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = 2e^{t/2}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on utilise la formule d'IPP :

$$J = [2te^{t/2}]_0^1 - 2 \int_0^1 e^{t/2} dt = 2e^{1/2} - 4[e^{t/2}]_0^1 = -2e^{1/2} + 4$$

$$I = 4e^{1/2} - 2 - 4(-2e^{1/2} + 4) = 12e^{1/2} - 18.$$

— Méthode 2 :

On sait qu'une primitive de la fonction $t \mapsto (t^2 + 1)e^{t/2}$ sur $[0; 1]$ est de la forme $F(t) = (at^2 + bt + c)e^{t/2}$.

On a $F'(t) = e^{t/2} \left(\frac{a}{2}t^2 + \frac{4a+b}{2}t + \frac{2b+c}{2} \right)$ et par identification des coefficients, on en déduit le système :

$$\begin{cases} a/2 & = & 1 \\ 4a+b & = & 0 \\ (2b+c)/2 & = & 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a & = & 2 \\ b & = & -8 \\ c & = & 18 \end{cases}$$

On a donc $I = [(2t^2 - 8t + 18)e^{t/2}]_0^1 = 12e^{1/2} - 18$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (2t^2 + t + 1)e^{-t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^2 (t+2)e^{3t} dt.$$

1.4 Les produits polynômes fonctions trigonométriques

On cherche ici des primitives de fonctions du type $P(x) \cos(\lambda x)$ ou $P(x) \sin(\lambda x)$ où P est un polynôme à coefficients réels (ou complexes) de degré n et λ est une constante réelle (ou complexe).

On dispose de trois méthodes :

- Méthode 1 : on utilise la formule d'intégration par parties (plusieurs fois...).
On cherche à dériver le polynôme.
- Méthode 2 : on affirme connaître la forme d'une primitive.
On peut montrer qu'une primitive de $P(x) \cos(\lambda x)$ est du type $Q_1(x) \cos(\lambda x) + Q_2(x) \sin(\lambda x)$ où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de même degré que P . On a le même résultat pour $P(x) \sin(\lambda x)$
- Méthode 3 : on utilise l'exponentielle complexe.
On se ramène au 1.3 on a $\cos(\lambda x) = \Re(e^{i\lambda x})$ et $\sin(\lambda x) = \Im(e^{i\lambda x})$.
Une primitive de $P(x) \cos(\lambda x)$ est donc la partie réelle d'une primitive de $P(x)e^{i\lambda x}$ et une primitive de $P(x) \sin(\lambda x)$ est donc la partie imaginaire d'une primitive de $P(x)e^{i\lambda x}$.

Exemple : Calculer $I = \int_0^\pi (t^2 + t + 1) \cos(2t) dt$.

- Méthode 1 :

On pose $u(t) = t^2 + t + 1$ et $v'(t) = \cos(2t)$. On a donc $u'(t) = 2t + 1$ et $v(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on utilise la formule d'IPP :

$$I = \left[\frac{(t^2 + t + 1) \sin(2t)}{2} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi (2t + 1) \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (2t + 1) \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} J.$$

On pose $u(t) = 2t + 1$ et $v'(t) = \sin(2t)$. On a donc $u'(t) = 2$ et $v(t) = -\frac{\cos(2t)}{2}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on utilise la formule d'IPP :

$$J = \left[-\frac{(2t + 1) \cos(2t)}{2} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2t) dt.$$

$$J = \left[-\frac{2\pi + 1}{2} + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{4} [\sin(2t)]_0^\pi.$$

Donc $J = -\pi$ et $I = \frac{\pi}{2}$.

- Méthode 2 :

On sait qu'une primitive de la fonction $t \mapsto (t^2 + t + 1) \cos(2t)$ sur $[0; \pi]$ est de la forme $F(t) = (at^2 + bt + c) \cos(2t) + (dt^2 + et + f) \sin(2t)$.

On a $F'(t) = (2dt^2 + 2(a + e)t + b + 2f) \cos(2t) + (-2at^2 + 2(b - d)t + 2c - e) \sin(2t)$.

On veut $F'(t) = (t^2 + t + 1) \cos(2t)$, par identification des coefficients on en déduit le système :

$$\begin{cases} 2d & = & 1 \\ a + e & = & 1/2 \\ b + 2f & = & 1 \\ -2a & = & 0 \\ b - d & = & 0 \\ 2c - e & = & 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a & = & 0 \\ b & = & 1/2 \\ c & = & 1/4 \\ d & = & 1/2 \\ e & = & 1/2 \\ f & = & 1/4 \end{cases}$$

On a donc $I = \left[\frac{2t + 1}{4} \cos(2t) + \frac{2t^2 + 2t + 1}{4} \sin(2t) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

— Méthode 3 :

Une primitive de la fonction $t \mapsto (t^2 + t + 1) \cos(2t)$ sur $[0; \pi]$ est la partie réelle d'une primitive de $(t^2 + t + 1) e^{2it}$.

Celle-ci est donc de la forme $F(t) = (at^2 + bt + c) e^{2it}$.

On a $F'(t) = (2iat^2 + (2a + 2ib)t + (2ic + b)) e^{2it}$.

Par identification des coefficients, on trouve $\begin{cases} 2ia & = 1 \\ 2a + 2ib & = 1 \\ 2ic + b & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -i/2 \\ b & = (1-i)/2 \\ c & = (1-i)/4 \end{cases}$

On a donc $F(t) = \left(-\frac{i}{2}t^2 + \frac{1-i}{2}t + \frac{1-i}{4}\right) e^{2it}$ et $\Re(F(t)) = \frac{2t+1}{4} \cos(2t) + \frac{2t^2+2t+1}{4} \sin(2t)$

On a donc $I = \left[\frac{2t+1}{4} \cos(2t) + \frac{2t^2+2t+1}{4} \sin(2t) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi (2t^2 + 3t + 1) \cos(t) dt \text{ et } I_2 = \int_0^\pi (2t^2 + 1) \cos(3t) dt.$$

1.5 Les fractions rationnelles

On s'intéresse ici uniquement aux fractions rationnelles du type $\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ avec $c \neq 0$.

La méthode à employer dépend du nombre de racines du polynôme $cx^2 + dx + e$.

— Méthode 1 : on a deux racines distinctes.

On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$.

Le polynôme $x^2 + 3x + 2$ admet deux racines réelles qui sont -1 et -2. On peut donc déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x+1}$.

On a $\frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{(\alpha + \beta)x + 2\alpha + \beta}{x^2 + 3x + 2}$ donc on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 3 \\ \alpha + 2\beta & = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha & = 2 \\ \beta & = 1 \end{cases}$$

On a donc $I = \int_0^1 \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} dx = [2 \ln|x+2| + \ln|x+1|]_0^1 = 2 \ln 3 - \ln 2$.

— Méthode 2 : on a une racine double.

On veut calculer $J = \int_0^1 \frac{x+3}{2x^2-8x+8} dx$.

Le polynôme $2x^2 - 8x + 8$ admet une racine réelle double égale à 2. On peut donc déterminer deux constantes réelles α et β telles que $\frac{x+3}{2x^2-8x+8} = \frac{\alpha}{(x-2)^2} + \frac{\beta}{x-2}$.

On a $\frac{\alpha}{(x-2)^2} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{\beta x + \alpha - 2\beta}{(x-2)^2}$ donc on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta & = 1 \\ \alpha - 2\beta & = 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha & = 5 \\ \beta & = 1 \end{cases}$$

On a donc $J = \int_0^1 \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} dx = \left[\frac{-5}{x-2} + \ln|x-2| \right]_0^1 = \frac{5}{2} - \ln 2$

— Méthode 3 : on n'a aucune racine réelle.

On veut calculer $K = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$.

Le polynôme $2x^2+x+1$ n'admet aucune racine réelle. On cherche dans un premier temps à faire apparaître une forme du type $\frac{u'}{u}$.

$$\frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \times \frac{4x+4}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \times \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2x^2+x+1}.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{4x+1}{2x^2+x+1}$ sur $[-1, 1]$ est $\ln|2x^2+x+1|$.

Pour $\frac{1}{2x^2+x+1}$, on cherche à faire apparaître une forme $\frac{1}{1+v^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1/2x+1/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1/4)^2+7/16} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{7} \times \frac{1}{16/7(x+1/4)^2+1} \\ &= \frac{8}{7} \times \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}. \end{aligned}$$

On a donc $K = \frac{1}{4} [\ln|2x^2+x+1|]_{-1}^1 + \frac{6}{7} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx$

Le calcul de cette dernière intégrale nécessite un changement de variable (voir 3.)

On pose $u = \frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}$ donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$:

$$\frac{6}{7} \times \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dx = \frac{6}{7} \times \int_{-3/\sqrt{7}}^{5/\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}/4}{1+u^2} du = \frac{3}{2\sqrt{7}} [\text{Arctan } u]_{-3/\sqrt{7}}^{5/\sqrt{7}}$$

Finalement, $K = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3}{2\sqrt{7}} \left[\text{Arctan } \frac{5}{\sqrt{7}} + \text{Arctan } \frac{3}{\sqrt{7}} \right]$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x-3}{2x^2-4x+2} dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx.$$

2 L'intégration par parties

La méthode consiste à écrire la fonction à intégrer comme le produit de deux fonctions u' et v , u et v étant de classe C^1 sur l'intervalle sur lequel on intègre, puis à utiliser la formule d'Intégration Par Parties :

$$\int_a^b u'(t) \times v(t) dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t) dt$$

On trouvera des exemples d'utilisation de cette méthode en 1.3 et 1.4

- On peut avoir plusieurs choix possibles pour u et v .
- On pensera parfois que $f(t) = 1 \times f(t)$ donc on peut poser $u'(t) = 1$ et $v(t) = f(t)$. C'est notamment le cas lorsque l'on calcule $\int_1^2 \ln t dt$.

Exercice 6

1. Niveau 1 : A l'aide d'intégration(s) par parties, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ et } I_2 = \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

2. Niveau 2 : A l'aide d'intégration(s) par parties, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 x (\text{Arctan } x)^2 dx \text{ et } I_2 = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
4. En déduire la limite de la suite (I_n) .

3 Les changements de variable

Cette méthode est basée sur la formule :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt$$

où φ est de classe C^1 sur $[a; b]$.

Dans la pratique, on procédera de la façon suivante :

- On pose $t = \varphi(x)$ donc $dt = \varphi'(x) dx$.
- On calcule les bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- On réécrit l'intégrale.
- Les changements de variable sont soit évidents soit indiqués dans l'énoncé.
- Pour les fonctions du type $\frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}$ où P et Q sont des polynômes, on choisira, (sauf mention contraire dans le sujet), le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

On a alors : **à ne pas connaître par coeur mais à savoir retrouver assez rapidement :**

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Exemple : Calcul de $I = \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1-\sin x}$.

- On pose $t = \tan \frac{x}{2}$ donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.
- Lorsque $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et lorsque $x = 0$, $t = 0$.

$$\text{On a donc } \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1-\sin x} = \int_{-1}^0 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{1-2t+t^2}$$

$$I = 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{(1-t)^2} = 2 \left[\frac{1}{1-t} \right]_{-1}^0 = 1$$

Exercice 8

Calculer les intégrales suivante en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^n}$ en posant $t = \ln x$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. $I_2 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{2+e^x}$ en posant $t = e^x$.
3. $I_3 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(2x)}{1+\cos x} dx$ en posant $t = \cos x$.
4. $I_4 = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ en posant $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan x$.