CORRECTION AP : Équations différentielles

Exercice 1

On commence par normaliser l'équation différentielle. On obtient $(E') : y' = \frac{2}{x^3}y$.

La fonction $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc on résout (E') séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Donc l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\mathcal{S}_- = \{x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto Ke^{-\frac{1}{x^2}} \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}\}$$

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Donc l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto He^{-\frac{1}{x^2}} \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R}\}$$

Raisonnons à présent par analyse-synthèse pour résoudre $(E) : x^3y' - 2y = 0$

- *Analyse* : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Alors en particulier, $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) = Ke^{-\frac{1}{x^2}}$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe $H \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = He^{-\frac{1}{x^2}}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ donc $f(0) = 0$ par continuité de f en 0.

- *Synthèse* : Soient $K, H \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \begin{cases} Ke^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ He^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ d'un part, et sur $\mathbb{R}_+^*$ d'autre part.

- $Kye^{-y^2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{Ke^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (avec $y = \frac{1}{x}$) et de même $\frac{He^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$

Ainsi, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc f est dérivable en 0.

Montrons que f est une solution de (E) .

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_-^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.
- (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.
- (E) est vérifiée par f en 0

Finalement, (E) a pour ensemble-solution $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} Ke^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ où } K, H \in \mathbb{R} \\ He^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \right\}$

Exercice 2

On commence par normaliser l'équation homogène. On obtient $(E'_H) : y' = -\frac{1}{x}y$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc on résout (E'_H) séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(-x)$.

Or $e^{-\ln(-x)} = e^{\ln(-\frac{1}{x})} = \frac{-1}{x}$ donc l'ensemble des solutions de (E'_H) sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\mathcal{S}_- = \left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto K \cdot \frac{1}{x} \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

En effet, comme K parcourt $\mathbb{R}$, le facteur -1 de la primitive peut être absorbé dans la constante multiplicative K .

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto -\ln(x)$.

Or $e^{-\ln(x)} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$ donc l'ensemble des solutions de (E'_H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto H \cdot \frac{1}{x} \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons maintenant une solution particulière de $(E') : y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cosh x}{x}$ d'une part sur $\mathbb{R}_-^*$ et d'autre part sur $\mathbb{R}_+^*$, en utilisant la méthode de la variation de la constante.

$$\begin{aligned} \circ x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{K(x)}{x} \text{ solution de } (E') &\Leftrightarrow \left(\frac{K(x)}{x} \right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{K(x)}{x} = \frac{\cosh x}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \frac{\cosh x}{x} \\ &\Leftrightarrow K'(x) = \cosh x \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{\sinh x}{x}$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$

- De même, $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sinh x}{x}$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$

Finalement, les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$\mathcal{S}_- = \left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{K + \sinh x}{x} \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{H + \sinh x}{x} \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R} \right\}$$

Raisonnons à présent par analyse-synthèse pour résoudre $(E) : xy' + y = \cosh x$

- *Analyse* : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Alors en particulier, $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) = \frac{K + \sinh x}{x}$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe $H \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{H + \sinh x}{x}$$

Or f est continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sont finies donc $K = 0$ et $H = 0$.

De plus, $\frac{\sinh x}{x} = \frac{\sinh x - \sinh 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sinh' 0 = \cosh 0 = 1$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ donc $f(0) = 1$ par continuité de f en 0.

- o *Synthèse* : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sinh x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ d'un part, et sur $\mathbb{R}_+^*$ d'autre part.

- Quand $x \rightarrow 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sinh x}{x} - 1}{x} = \frac{\frac{x + o(x^2)}{x} - 1}{x} = \frac{x + o(x^2) - x}{x^2} = o(1)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

$$\left(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{2} = x + o(x^2) \right)$$

Montrons que f est une solution de (E) .

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_-^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.
- (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.
- (E) est vérifiée par f en 0

Finalement, (E) a pour ensemble-solution $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sinh x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right\}$

Exercice 3

On commence par normaliser l'équation homogène. On obtient $(E'_H) : y' = \frac{3}{x}y$

La fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc on résout (E'_H) séparément sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

- o Sur $\mathbb{R}_-^*$, $x \mapsto \frac{3}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto 3 \ln(-x)$.

Or $e^{3 \ln(-x)} = (e^{\ln(-x)})^3 = -x^3$ donc l'ensemble des solutions de (E'_H) sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\mathcal{S}_- = \{x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto K \cdot x^3 \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}\}$$

En effet, comme K parcourt $\mathbb{R}$, le facteur -1 de la primitive peut être absorbé dans la constante multiplicative K .

- o Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{3}{x}$ admet pour primitive $x \mapsto 3 \ln(x)$.

Or $e^{3 \ln(x)} = x^3$ donc l'ensemble des solutions de (E'_H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto H \cdot x^3 \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R}\}$$

Cherchons maintenant une solution particulière de $(E') : y' - \frac{3}{x}y = -x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ d'une part sur $\mathbb{R}_-^*$ et d'autre part sur $\mathbb{R}_+^*$, en utilisant la méthode de variation de la constante.

- o $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto K(x)x^3$ solution de (E') $\Leftrightarrow (K(x)x^3)' - \frac{3}{x} \cdot K(x)x^3 = -x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow K'(x)x^3 + 3K(x)x^2 - 3K(x)x^2 = -x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Or } \int_a^b -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} -u^2 \cos(u) \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \cos(u) du = [\sin u]_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}$$

Ainsi, $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est une primitive de K' donc $x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$

- o Idem, $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$

Finalemment, les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$\mathcal{S}_- = \left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \left(H + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R} \right\}$$

Raisonnons à présent par analyse-synthèse pour résoudre $(E) : xy' - 3y = -x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

◦ *Analyse* : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Alors en particulier, $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) = \left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^3$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est une solution de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe $H \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \left(H + \sin \frac{1}{x} \right) x^3$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ donc $f(0) = 0$ par continuité de f en 0.

◦ *Synthèse* : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \left(H + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

– f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ d'un part, et sur $\mathbb{R}_+^*$ d'autre part.

– Quand $x \rightarrow 0^-$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^3}{x} = \left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^2 = o(1)$

De même, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Montrons que f est une solution de (E) .

– f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

– (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_-^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.

– (E) est vérifiée par f en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ car alors (E) et (E') sont équivalentes.

– (E) est vérifiée par f en 0, si l'on prolonge par continuité en 0 le membre de droite de (E) , puisque $-x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Finalemment, (E) a pour ensemble-solution $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \left(K + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, (K, H) \in \mathbb{R}^2 \\ \left(H + \sin \frac{1}{x} \right) x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \right\}$