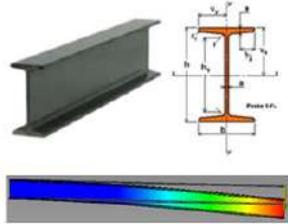


| | | |
|---|---|---|
|  | <h1 style="color: blue;">Cours-Ressources 3C2</h1> <h2 style="color: orange;">Résistance des matériaux</h2> |  |
|---|---|---|

| | |
|---------------------------------------|--|
| CENTRE D'INTERETS | CI3-3: Dimensionnement des systèmes |
| Activités pratiques associées | Série C (démarche inductive priorisée) |
| Pré-requis | <ul style="list-style-type: none"> ✓ Isolement d'un solide ✓ Résolution d'un problème de statique |
| Savoirs et savoirs-faire associés | <p>S42 Comportement des solides déformables :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Déterminer la répartition des contraintes dans une section droite - Vérifier la résistance mécanique d'une poutre droite - Déterminer le coefficient de sécurité par rapport aux exigences du cahier des charges fonctionnel - Déterminer l'équation de la flèche dans une poutre droite soumise à de la flexion, avec chargements ponctuels ou répartition linéique constante de pression <p>On se limite aux sollicitations suivantes : flexion, traction-compression et torsion non combinées.</p> |
| Compétences principales en SII | B MODELISER, C RESOUDRE |
| Compétences visées | <p>B1 Identifier et caractériser les grandeurs physiques agissant sur un système.</p> <p>B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement</p> <p>C2 Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique.</p> |
| Matériels & Média à utiliser | Vidéo projecteur, films de déformation de pièces, manipulation de baguettes en flexion |

Résistance des matériaux

Contexte

Cette partie du cours s'inscrit dans le centre d'intérêt n°3 : **CI3.3 : Dimensionnement des systèmes** qui englobera le choix des actionneurs électriques ainsi que le choix des dimensions des organes mécaniques des systèmes étudiés.

1 Problématique : Pourquoi la barre de la pince de la cordeuse fait-elle 16 mm de diamètre et pas 8 ou 32 ?

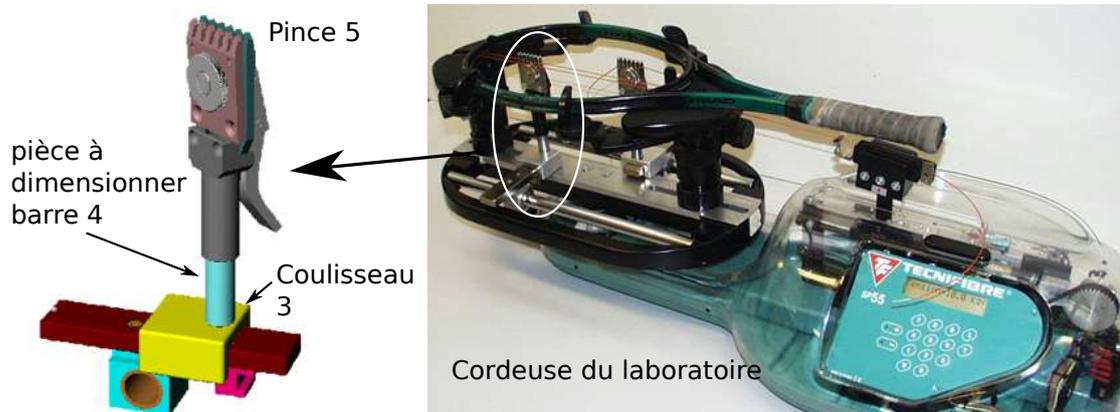


FIGURE 1 – La cordeuse de raquettes de tennis, un système qui doit résister aux efforts de cordage.

1.1 A quoi sert-elle ? La vision globale

La première étape d'un dimensionnement consiste à déterminer le rôle de la pièce et les sollicitations globales qu'elle subit : il s'agit de la résolution habituelle du PFD (ou du PFS).

Ici : La barre 4 est soumise :

1. à son poids, qu'on négligera pour cette application,
2. à l'action mécanique de la pince 5,
3. à la réaction du coulisseau 3.

1.2 Que se passe-t-il dans la pièce ?

Lorsqu'une pièce supporte ou transmet des efforts, on s'intéresse d'abord aux efforts extérieurs (étape précédente) puis on analyse la façon dont ces efforts se traduisent dans la pièce.

Pour cela, on modélise la pièce par sa ligne moyenne : c'est la ligne qui passe par les centres de gravité des sections de la pièce. (Elle n'est pas forcément droite, mais dans votre programme, elles le sont).

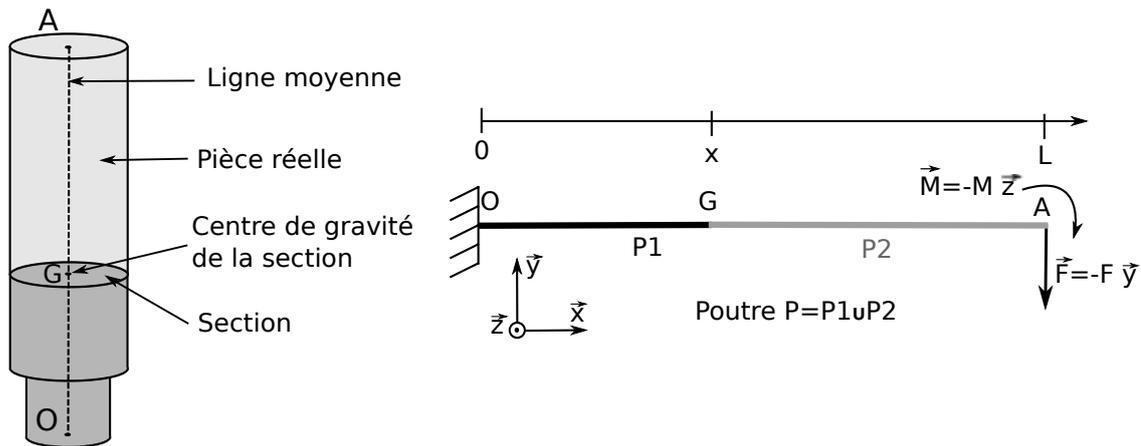


FIGURE 2 – Pièce réelle et sa représentation simplifiée par sa ligne moyenne

On va par la suite travailler sur cette ligne moyenne pour faire les calculs des efforts supportés par l'intérieur de la pièce.

Pour le paramétrage, on ne dessine que la ligne moyenne de la poutre P , souvent à l'horizontale.

On rajoute les axes et des points : O pour l'origine, A pour l'extrémité et G un point intermédiaire fictif de position quelconque x entre O et A (voir figure 2) (G est le centre de gravité de la section, pas de la pièce).

Le calcul de l'action mécanique interne, appelée **Torseur de Cohésion** ou **Torseur des efforts intérieurs** se fait en coupant la poutre P en deux parties :

- Une partie gauche P_1 ,
- Une partie droite P_2 .

Les deux pièces P_1 et P_2 sont reliées par une liaison encastrement. Le torseur de liaison est donc dans le cas général un torseur complet :

$$\{\mathcal{T}(P_2 \rightarrow P_1)\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(P_2 \rightarrow P_1) \\ \vec{M}(G, P_2 \rightarrow P_1) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} X_{P_2 P_1} & L_{P_2 P_1} \\ Y_{P_2 P_1} & M_{P_2 P_1} \\ Z_{P_2 P_1} & N_{P_2 P_1} \end{array} \right\}_G$$

Dans le cadre de la RDM, on notera les composantes du torseur de cohésion comme ceci :

$$\{\mathcal{T}_{Int}\}_G = \{\mathcal{T}(P_2 \rightarrow P_1)\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} N & Mt \\ T_y & Mf_{Gy} \\ T_z & Mf_{Gz} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{ll} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_{Gz} \end{array} \right\}_G \text{ si pb plan (x,y)}$$

avec :

- N l'**effort normal** (perpendiculaire à la section de poutre),
- T_y la composante suivant \vec{y} de l'**effort tranchant**,
- T_z la composante suivant \vec{z} de l'**effort tranchant**,
- Mt le **moment de torsion** (si $M_t \neq 0$ alors le pb n'est pas plan car non symétrie de chargement)

- Mf_{Gy} la composante suivant \vec{y} du **moment fléchissant** et
- Mf_{Gz} la composante suivant \vec{z} du moment fléchissant.

Pour obtenir $\{\mathcal{T}_{Int}\}_G$, on isole P_1 ou P_2 et on résout le PFS. On obtient alors un $\{\mathcal{T}_{Int}\}_G$ qui dépend de x .

Application : Isoler P_2 et montrer que le torseur de cohésion vaut :

$$\{\mathcal{T}_{Int}\}_G(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot (L - x) - M \end{array} \right\}_G$$

NB :

- Ce torseur est caractéristique d'une pièce soumise à de la **flexion**.
- On retrouve le torseur de liaison en O :

$$\{\mathcal{T}(\text{coulisseau} \rightarrow 3)\}_O = \{\mathcal{T}(P_1 \rightarrow P_2)\}_O = -\{\mathcal{T}_{Int}(0)\}$$

On a donc ici : $M_f(x) = F \cdot (x - L) - M$ et $T(x) = -F$.

On remarque au passage que $\frac{dM_f(x)}{dx} = -T(x)$ Ceci est vrai dans tous les cas (démonstration en annexe).

Pour bien visualiser l'évolution du torseur de cohésion, on trace ses composantes sur des diagrammes :

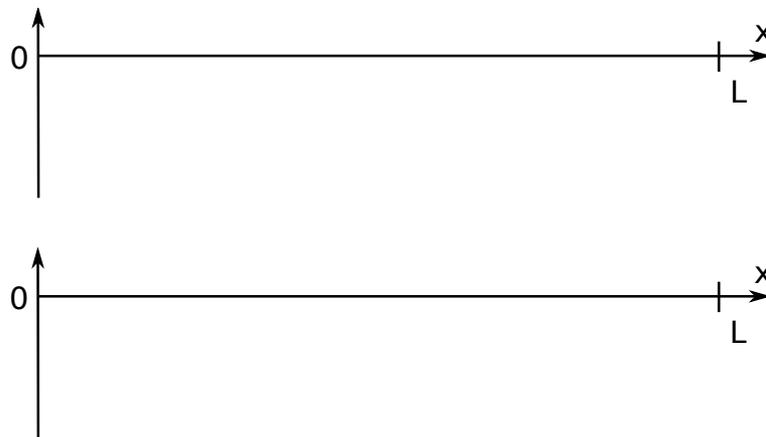


FIGURE 3 – Diagrammes d'évolution de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la poutre.

Remarque : Les différents types d'appuis

| Symbole | Nom | Torseur transmissible plan | liaisons |
|---------|-----|----------------------------|----------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

1.3 Comment la pièce réagit-elle à ces actions mécaniques internes ?

1.3.1 Etude Qualitative

Le torseur de cohésion se calcule dans la poutre modélisée par sa ligne moyenne. Il ne dépend pas de la section de la poutre. Ainsi, du point de vue du torseur de cohésion, les quatre cas de la figure 4 sont identiques.

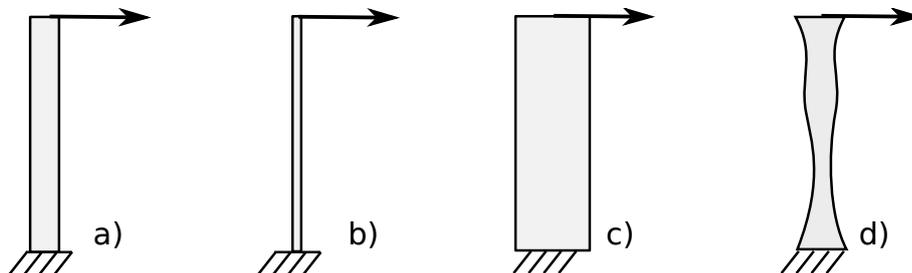


FIGURE 4 – Différentes poutres soumises aux mêmes conditions extérieures

Cependant, le comportement de ces différentes poutres en termes de tenue mécanique et de déformation va varier d'une à l'autre.

On sent bien que plus une poutre a une section importante, plus elle sera **solide** : elle cassera ou pliera de façon irrémédiable pour une force plus grande.

De même plus la section est grande, plus la poutre est **rigide** : pour une même force, elle se déformera moins qu'une poutre de plus faible section.

Expérimentalement, on constate aussi que la flèche (déplacement du bout d'une poutre fléchie) décroît beaucoup plus vite que la section ne croît : si on double le diamètre d'une poutre, on divise par 16 sa flèche.

On voit aussi que le matériau joue sur la déformation : pour une même section, une poutre en acier se déformera moins qu'une poutre en chêne, elle-même moins souple qu'une poutre en sapin.

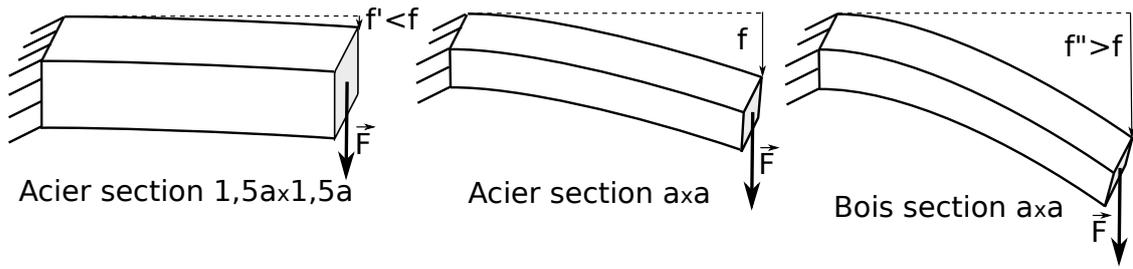


FIGURE 5 – Influence de la section et du matériau sur la flèche f

On constate aussi que lorsque la section n'est pas circulaire, son orientation par rapport à la force joue.

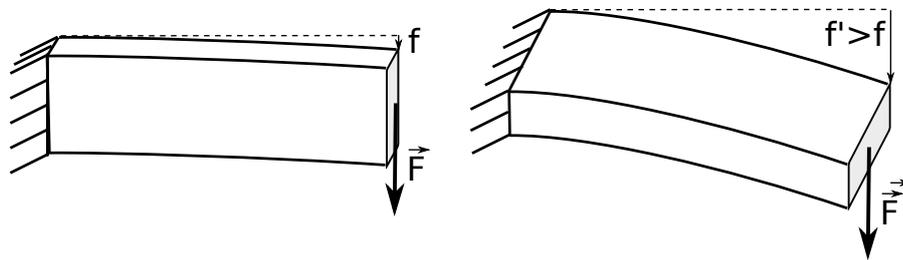


FIGURE 6 – Influence de l'orientation de la section sur la flèche f pour une même force

1.3.2 Forme de la poutre déformée

On constate que la poutre soumise à une force en bout, ne se déforme pas de façon constante. Elle plie plus (sa courbure est plus grande) proche de l'encastrement et elle reste droite du côté de la force.

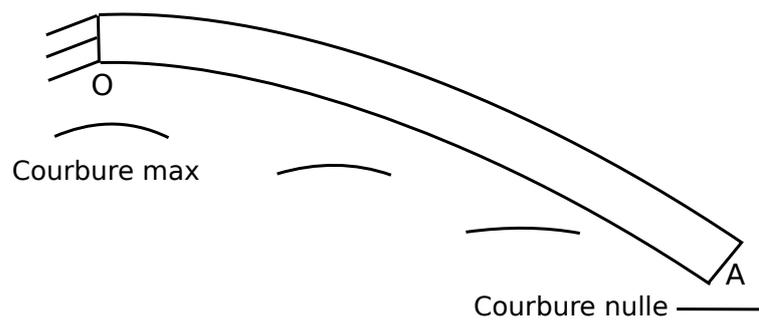
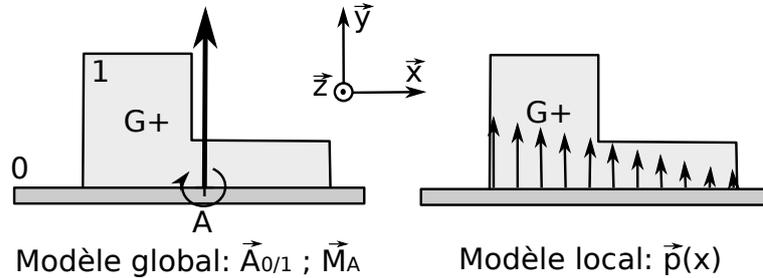


FIGURE 7 – Evolution de la courbure dans la poutre

Si on se souvient de la répartition du torseur de cohésion dans la poutre (Figures 3 avec $M=0$ ici), on voit que l'effort tranchant est constant dans la poutre. Par contre le moment fléchissant est maximal en O et nul en A. Il semble donc que la courbure dépende du moment fléchissant. (C'est ce qui explique la forme effilée des cannes à pêche)

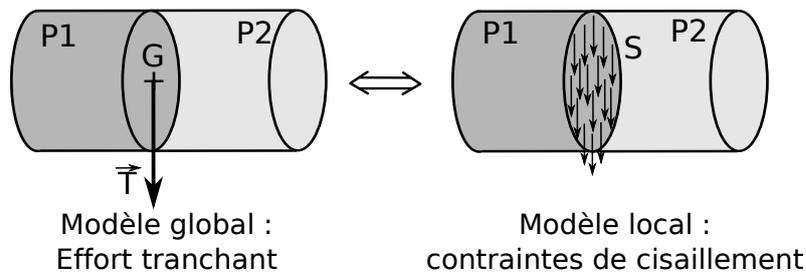
1.4 Efforts : du global au local

Le torseur des actions mécaniques, qu'il soit de liaison ou de cohésion, est un modèle global. Dans la pratique, les forces et les moments sont répartis dans toute la section sous la forme de contraintes. C'est l'analogie de la pression de contact dans une liaison appui plan :

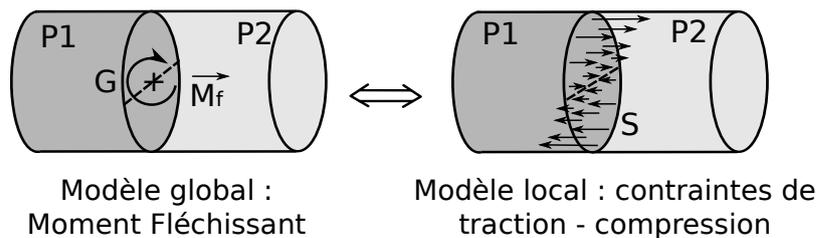


Les contraintes s'expriment donc en Pa, et plus couramment en MPa.

Appliquons ce modèle à notre pièce. Pour simplifier on va regarder, d'une part la traduction en contraintes de l'effort tranchant :



D'autre part la répartition des contraintes dont l'équivalent global est le moment fléchissant autour de l'axe \vec{z} .



1.5 Du point de vue des déformations

Les théories de la mécanique vues jusque là (Statique, Cinématique, Dynamique) s'appliquaient à des solides indéformables. Avec la RDM, on prend en compte le fait que les solides, aussi rigides soient-ils, sont en fait déformables. On utilise les théories de la RDM pour estimer les déformations des pièces étudiées.

1.5.1 Qu'est-ce qu'une déformation

La déformation est une notion locale. Elle est sans unité, se note ε et vaut :

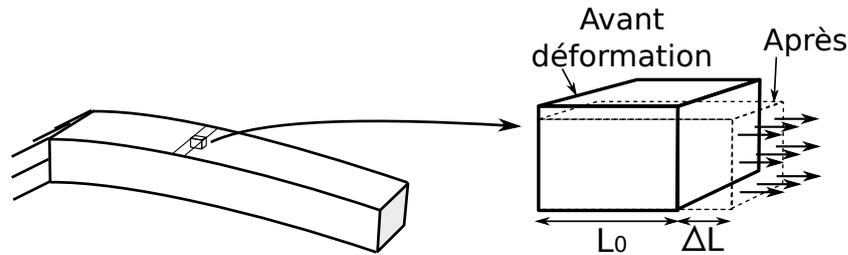


FIGURE 8 – Déformation longitudinale dans la poutre fléchie

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On distingue deux sortes de déformations :

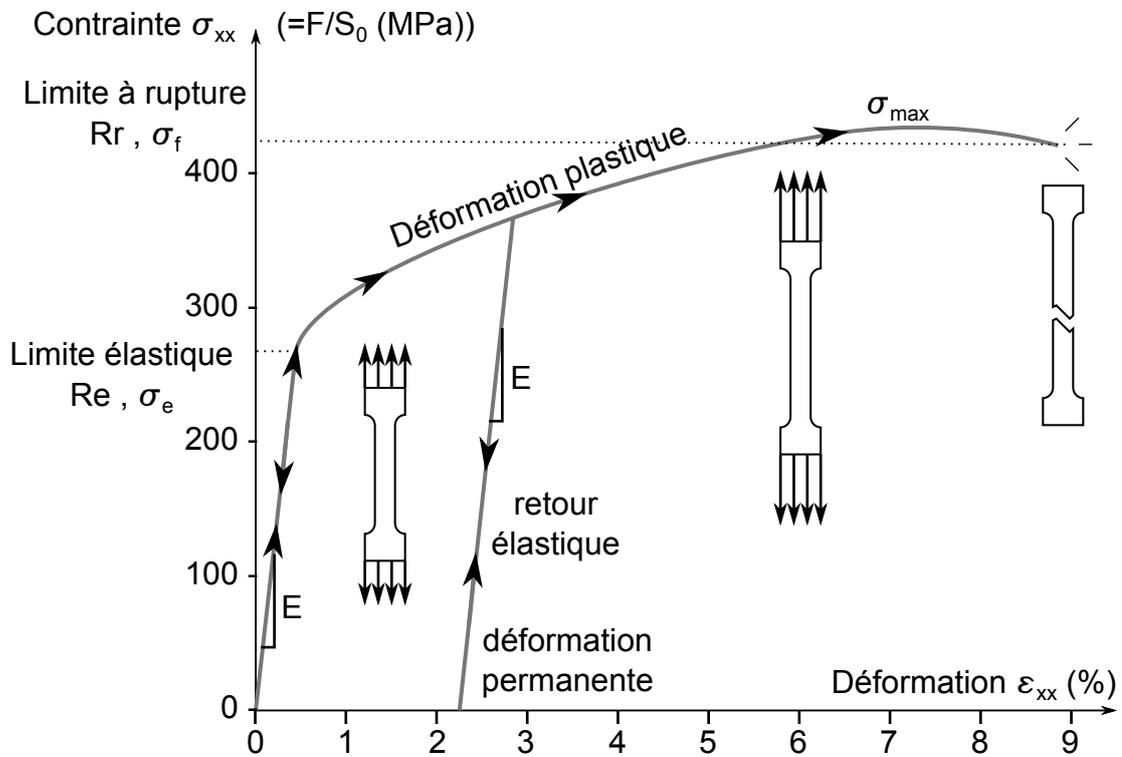


FIGURE 9 – Relation entre la contrainte σ et la déformation ε

- Les déformations élastiques : ce sont des déformations, liées à une contrainte, qui s'annulent lorsqu'on relâche l'effort. C'est le cas pour une règle que l'on fléchit et qui reprend ensuite sa forme quand on la repose.
- Les déformations plastiques : lorsqu'on dépasse une contrainte limite, dite **limite élastique**, R_e , alors on déforme la matière sans qu'elle ne reprenne sa forme initiale lorsqu'on la relâche. C'est par exemple ce qui se passe quand on plie un fil de fer ou qu'on sert fort un fil de cuivre dans un bornier électrique.

La figure 9 montre dans la première partie de la courbe la déformation élastique, proportionnelle à la contrainte.

La pente est le module d'Young E (en MPa). On a la relation, nommée **loi de Hooke** :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

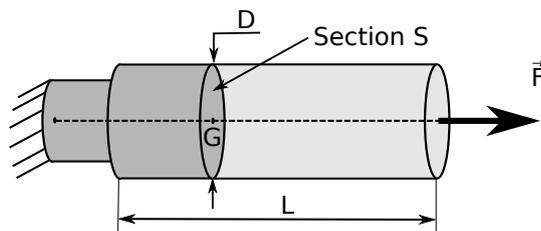
Si on continue d'augmenter la déformation, on rentre dans le domaine plastique (au delà de R_e). La relation entre contrainte et déformation n'est plus linéaire. Si on continue encore à déformer la pièce, elle finit par casser (au delà de R_r comme rupture).

Unités : Les unités S.I. sont le Pa pour la contrainte, le m pour les longueurs et les N pour les forces. On utilise cependant systématiquement en RDM le MPa , le mm , le N et le $N.mm$. La déformation est sans dimension, on la donne souvent en pourcentage.

Signes : Lorsque la contrainte tend à étirer la matière (traction) la contrainte et donc la déformation sont comptées positivement.

Ordres de grandeur : Le module d'Young de l'acier, du fer est $E_{fer} = 210GPa$.

| matériaux | acier | aluminium | PVC | épicéa fibres | épicéa \perp fibres |
|-----------|--------------|-------------|---------|------------------|-----------------------|
| E | 210 GPa | 70 GPa | 2,5 GPa | 8-12 GPa | 100-800 MPa |
| R_r | 200-1000 MPa | 200-300 MPa | 35 MPa | 50-100 MPa | 2-4 MPa |



Application : La barre de la cordeuse est en acier.

Calculer la contrainte dans la barre de diamètre $D = 16mm$ si on tire dessus dans le sens de la longueur avec une force F de $2000N$.

En déduire la déformation ε .

De quelle longueur ΔL la partie de longueur L s'étire-t-elle? ($L=80$ mm)

Quelle est la force maximale que cette section peut supporter en traction, avant déformation plastique si l'acier utilisé a pour limite élastique $R_e = 300MPa$?

1.5.2 Comment mesurer expérimentalement les déformations ?

Si pour la mousse, les déformations sont visibles à l'œil nu, ce n'est pas le cas pour les matériaux utilisés en construction mécanique ou en architecture comme les métaux, le bois, le béton...

On a alors recours à des instrumentations pour faire les mesures. Il existe différentes méthodes dont on peut citer :

1. La jauge de déformation. Il s'agit d'un petit fil conducteur replié collé dans le sens des déformations, qui suit les déformations de la pièce.

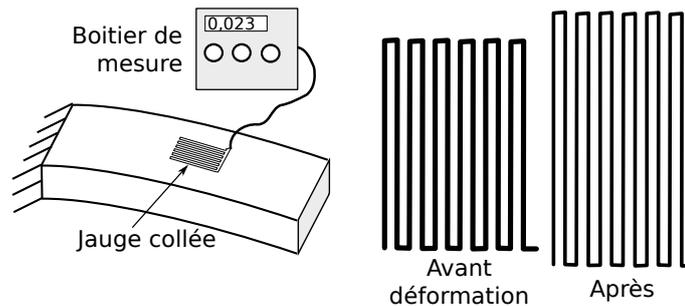


FIGURE 10 – Mesure de déformation par jauges : lorsque la jauge s'allonge (traction), sa résistance électrique augmente. Lorsque la surface est en compression, la jauge se comprime et sa résistance diminue. Un boîtier d'acquisition très sensible permet ensuite de convertir les variations de résistance en déformation.

2. La corrélation d'images : une autre méthode consiste à peindre la surface de la pièce étudiée avec un mouchetis aléatoire et de la filmer pendant qu'elle se déforme. Un logiciel adapté permet ensuite de détecter avec une précision inférieure au pixel de l'image les déplacements de chaque point et d'en déduire les déformations locales.

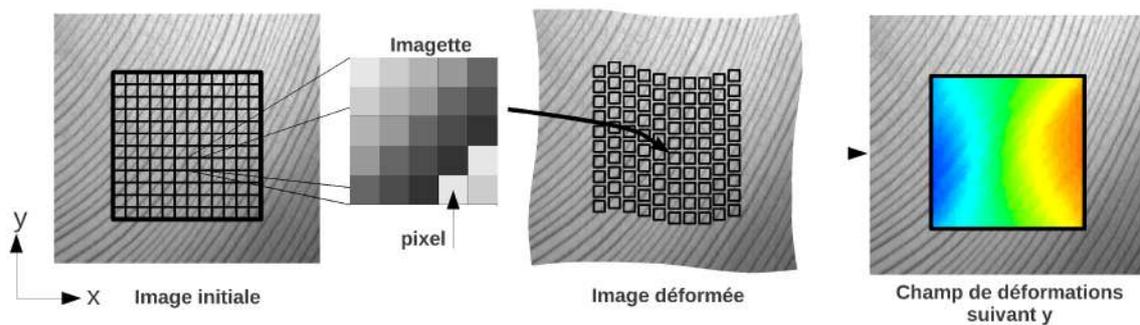


FIGURE 11 – Mesure de déformation par corrélation d'images : le logiciel repère des imagettes de quelques pixels de côté et les suit dans leur déplacement au cours du chargement

3. La photoélasticimétrie : elle permet de visualiser les déformations dans certains polymères avec de la lumière polarisée.
4. On peut aussi utiliser pour les essais de traction des extensomètres à couteaux. Il s'agit d'un appareil qui mesure un déplacement entre deux points éloignés d'une éprouvette.

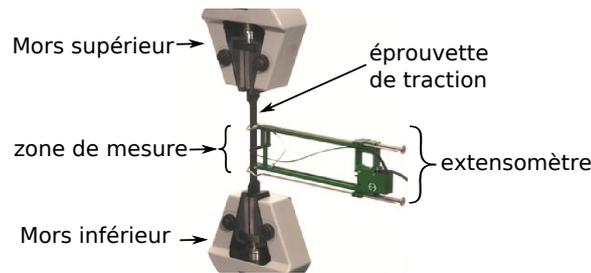
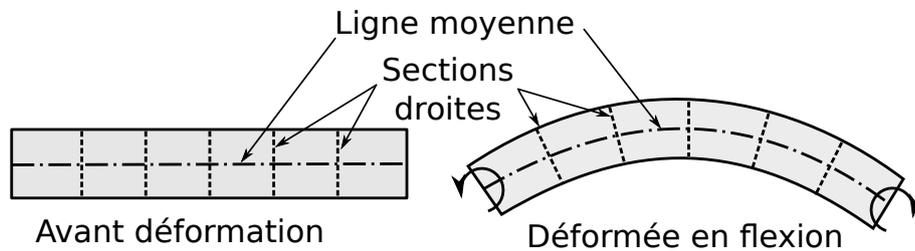


FIGURE 12 – Mesure de déformation par extensomètre

1.5.3 Comment la barre en flexion se déforme-t-elle ?

La barre de la cordeuse est soumise à de la flexion et du cisaillement. Comment ces sollicitations se traduisent-elles en terme de déformation ?

Regardons ce qui se passe avec un morceau de mousse que l'on fait fléchir.



On constate que les sections qui sont initialement perpendiculaires à la ligne moyenne, le sont encore après déformation.

Ceci est en fait une des hypothèses de la RDM, appelée **Hypothèse de Navier-Bernoulli**. Une section **plane et perpendiculaire** à la ligne moyenne est appelée **section droite**.

Hypothèse de Navier-Bernoulli : Les sections droites avant déformations restent droites pendant la déformation.

Conséquences sur la répartition des contraintes :

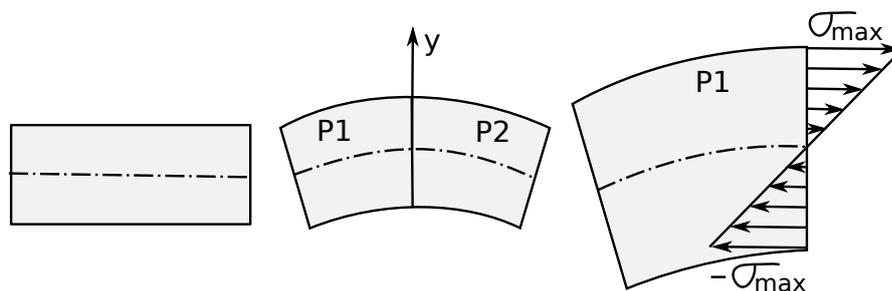


FIGURE 13 – Répartition des contraintes en fonction de y dans une section de poutre en flexion.

On constate que la ligne moyenne change de forme, elle se courbe, mais sa longueur ne varie pas. On l'appelle la fibre neutre.

Par contre les fibres extérieures à la courbure (celles du haut ici) doivent s'allonger. Pour cela, la partie 2 de la poutre doit tirer dessus : elles sont en traction. On a alors $\sigma > 0$. (voir fig 13)

Inversement, les fibres intérieures (celles du bas ici) doivent se comprimer : elles sont en compression. Pour cela, la partie 2 de la poutre doit pousser dessus. On a alors $\sigma < 0$.

La répartition des contraintes est linéaire entre la surface supérieure et la surface inférieure.

1.6 Relations entre torseur de cohésion, contraintes et déformation

1.6.1 Relation entre les contraintes et le moment fléchissant

On l'a vu précédemment, deux choses jouent sur le comportement d'une pièce soumise à de la flexion :

- la géométrie de la section : celle-ci est quantifiée par le moment quadratique I_{Gz} autour de l'axe Gz pour un moment fléchissant suivant l'axe \vec{z} .
- Le matériau de la pièce : celui-ci est caractérisé par le module d'Young E pour la déformation élastique (rigidité) et par la limite élastique R_e pour la solidité.

La figure 13 montre qu'en cas de flexion, la contrainte maximale est atteinte sur la fibre supérieure et la fibre inférieure. C'est cette valeur qui ne doit pas dépasser la limite élastique R_e du matériau. Il est donc bon de calculer sa valeur en fonction de la sollicitation.

Nous allons déterminer σ_{max} en fonction du moment fléchissant Mf_{Gz} , en s'aidant de la figure 14.

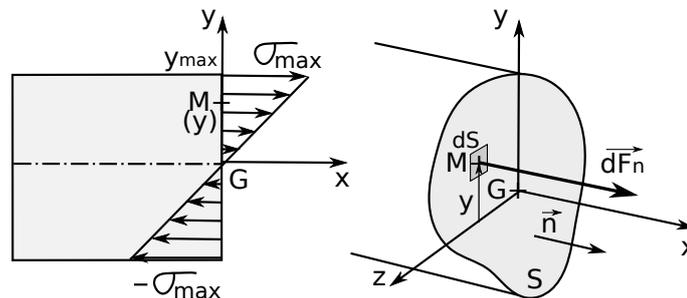


FIGURE 14 – Répartition des contraintes en fonction de y dans une section de poutre en flexion.

Au point M (x,y,z), la contrainte normale (suivant $\vec{n} = \vec{x}$) σ vaut :

$$\sigma(y) = \sigma_{max} \frac{y}{y_{max}}$$

Sur la surface dS , cette contrainte normale donne une force élémentaire \vec{dF}_n :

$$dF_n = \sigma(y).dS$$

Cette force engendre en G, suivant l'axe \vec{z} un moment élémentaire dM_z :

$$dM_z = -y.dF_n = -y^2 \frac{\sigma_{max}}{y_{max}} dS$$

On obtient alors le moment fléchissant suivant \vec{z} , Mf_{Gz} par intégration :

$$Mf_{Gz} = \iint_S dM_z = \iint_S -y^2 \frac{\sigma_{max}}{y_{max}} dS = -\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} \iint_S y^2 dS$$

On appelle moment quadratique I_{Gz} de la section autour de l'axe Gz la grandeur :

$$I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$$

On a alors la relation :

$$\sigma_{max} = -\frac{M f_{Gz}}{I_{Gz}} y_{max}$$

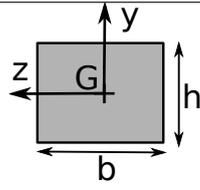
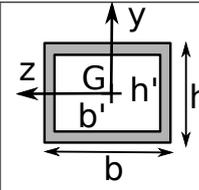
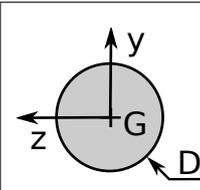
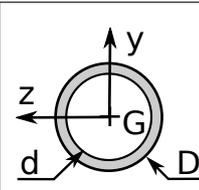
et plus généralement :

$$\sigma(M) = -\frac{M f_{Gz}}{I_{Gz}} y$$

On peut remarquer que le module d'Young du matériau n'intervient pas dans la relation.

1.6.2 Exemples de moments quadratiques

On peut calculer pour chaque section le moment quadratique I_{Gz} avec la formule $I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$. Cependant pour de nombreuses pièces à section simple, on utilise un formulaire :

| | | | | |
|----------|--|--|---|--|
| sections |  |  |  |  |
| I_{Gz} | $\frac{b \cdot h^3}{12}$ | $\frac{b \cdot h^3 - b' \cdot h'^3}{12}$ | $\frac{\pi \cdot D^4}{64}$ | $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$ |

On remarque que le moment quadratique des pièces creuses s'obtient par soustraction du moment quadratique de la partie vide.

Applications : Donner l'expression du moment quadratique d'une barre carrée de côté a :

$$I_{Gz-\text{carré-plein}} =$$

et celui d'un tube carré de côté extérieur a et intérieur a'

$$I_{Gz-\text{tube-carré}} =$$

Calculer le moment quadratique et la surface de la section d'un tube carré de côté extérieur $a = 40mm$ et d'épaisseur $e = 2mm$. Faire de même avec une barre carrée pleine de côté $a_2 = 30mm$. Comparer.

Calculer le moment quadratique I_{Gzc} de la partie centrale de la barre de la cordeuse ($D = 16mm$) et celui I_{Gzi} de la partie inférieure ($D = 10mm$). Les comparer.

Le moment maximal (corde tendue à 400 N) dans la zone inférieure vaut environ 6000 N.mm.

Calculer la contrainte maximale dans les deux sections, σ_{max-c} et σ_{max-i} . Les comparer.

1.6.3 Concentrations de contraintes

La répartition des contraintes dans la section vue précédemment est valable suivant certaines conditions :

- On doit se placer à au moins une dimension de section (diamètre, côté...) de la zone où les efforts sont exercés sur la pièce. C'est l'**hypothèse de Barré de Saint-Venant**.
- La section doit évoluer lentement tout au long de la poutre (ou être constante).

Dans le cas contraire, les contraintes dépendent des singularités de la poutre. On parle de concentrations de contraintes. Dans le cas de la barre de la cordeuse, on a un épaulement. Les contraintes maximales y sont plus fortes que dans la petite section car la répartition des contraintes prend la forme donnée dans la figure 15.

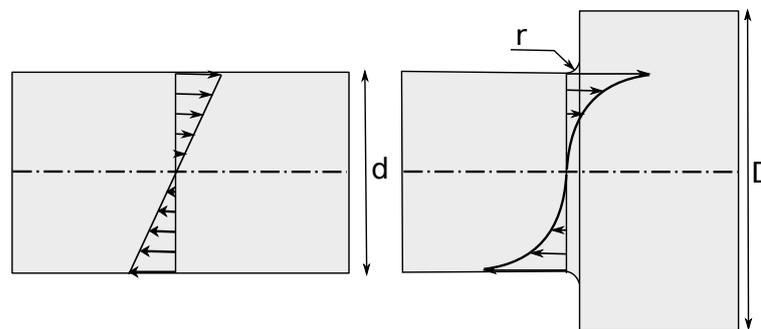


FIGURE 15 – Concentration des contraintes dans un épaulement d'une barre en flexion.

On appelle coefficient de concentration de contraintes K le rapport entre la valeur qu'aurait la contrainte maximale dans la petite section si la section était constante et la contrainte maximale réelle.

$$K = \frac{\sigma_{max-réelle}}{\sigma_{max-théorique}}$$

Ce coefficient dépend de la singularité de section. Par exemple, pour un épaulement, la concentration dépend de la différence de diamètres et du rayon de raccordement entre les deux rayons.

Applications : On rappelle que les diamètres avant et après l'épaulement sont respectivement $d=10\text{mm}$ et $D=16\text{mm}$. Le rayon de raccordement vaut $r=0,5\text{mm}$.

Déterminer le coefficient de concentration de contraintes en flexion K_f pour l'épaulement étudié. En déduire la contrainte maximale en reprenant le résultat de la question précédente.

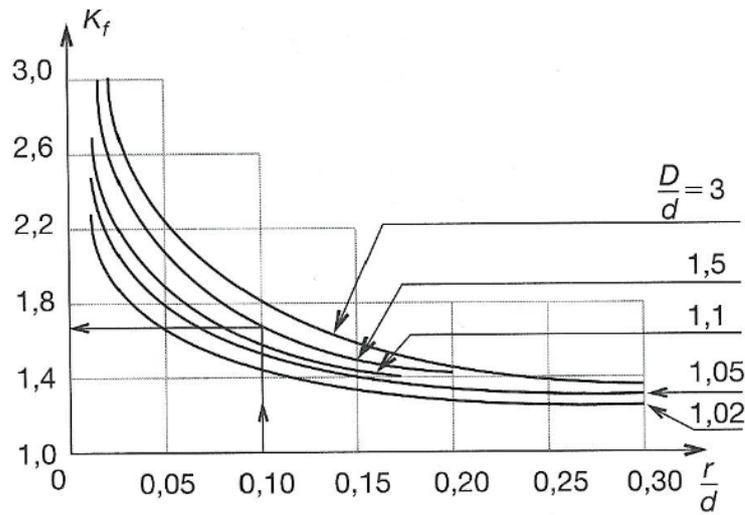


FIGURE 16 – Coefficient de concentration des contraintes dans un épaulement d’une barre en flexion (source : Guide du Calcul en Mécanique, Hachette Technique).

1.6.4 Coefficient de sécurité

Lorsqu’on détermine la dimension d’une pièce pour qu’elle résiste à une sollicitation mécanique, on ne choisit pas la dimension qui résiste théoriquement juste à la valeur d’effort maximal. On applique un facteur de sécurité noté s .

On cherche à vérifier qu’en tout point, la contrainte ne dépasse pas la limite élastique divisée par s :

$$\sigma_{max} < \frac{R_e}{s}$$

Ce coefficient, sans unité, permet de s’assurer que la pièce ne cassera pas, malgré les erreurs du modèle. En effet, on ne connaît pas toutes les conditions avec précision.

On choisit le coefficient de sécurité en fonction de l’application et du degré d’incertitude qui en découle :

| coef de sécurité s | Conditions d’utilisation |
|----------------------|---|
| 1,5 à 2 | Cas exceptionnels de grande légèreté. Charges surévaluées. |
| 2 à 3 | Légèreté recherchée (aviation) Charges maximales bien connues. |
| 3 à 4 | Construction et calculs soignés. |
| 4 à 5 | construction courante, effets dynamiques négligés mais faibles |
| 5 à 8 | Calculs sommaires, efforts difficiles à évaluer, chocs, appareils de levage |
| 8 à 10 | Matériaux non homogènes, chocs, élingues de levage |
| 10 à 15 | Chocs très importants, effort très mal connus (presses), ascenseurs |

Applications : On rappelle que l’acier utilisé a pour limite élastique $R_e = 300MPa$. Calculer le coefficient de sécurité qu’on possède sur cette pièce d’après le calcul avec concentrations de contraintes.

1.6.5 Calcul de la flèche

Dans certaines applications c'est la flèche (ici le déplacement suivant y) qu'il est important d'évaluer. Pour cela, on doit savoir comment le moment fléchissant "tord" la poutre.

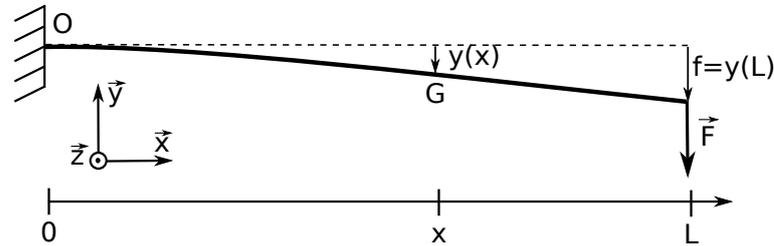


FIGURE 17 – Equation de la ligne moyenne déformée $y(x)$

Le moment fléchissant a pour effet de courber la poutre comme on l'a vu dans la figure 7. La courbure de la ligne moyenne est en fait la dérivée seconde de y : \ddot{y} . C'est aussi l'inverse du rayon de courbure R : $\ddot{y} = \frac{1}{R}$.

La courbure dépend du moment fléchissant mais aussi de la section de la poutre et de la raideur du matériau :

$$\ddot{y} = \frac{M f_{Gz}(x)}{E \cdot I_{Gz}}$$

NB : La relation ci dessus n'est valable que si la pièce est déformée de façon élastique, c'est à dire si la contrainte maximale ne dépasse pas la limite élastique R_e .

On intègre ensuite deux fois cette relation pour trouver la fonction $y(x)$ qui définit la forme de la poutre déformée.

On a alors besoin de déterminer les constantes d'intégrations. On utilise pour cela les conditions aux limites, qui dépendent du type de support.

Application : En supposant la section constante entre 0 et L exprimer f en fonction de F , I_{Gz} et E .

1.7 Vérifications par éléments finis

Les modèles de la théorie de la résistance des matériaux permettent de faire des calculs rapides et d'évaluer simplement les dimensions qu'on doit adopter pour une pièce. On peut aussi avoir une idée de la déformation de cette pièce sous charge.

Cependant, le recours aux logiciels de conception assistée par ordinateurs CAO (Inventor...) donne la possibilité de vérifier tout cela. On utilise pour cela une méthode de calcul, dite méthode aux éléments finis (MEF) qui permet de calculer la contrainte dans toute la pièce, même si celle-ci ne répond pas aux hypothèses de la RDM. Il faut tout de même l'utiliser avec précaution car les résultats dépendent du maillage utilisé.

Si on l'applique à la barre de la cordeuse, on retrouve :

1.8 Exemples de pièces soumises à la flexion

Sapin :

- vent dans toutes les directions \Rightarrow section circulaire
- Moment fléchissant de plus en plus faible quand on s'approche du sommet \Rightarrow diamètre décroissant

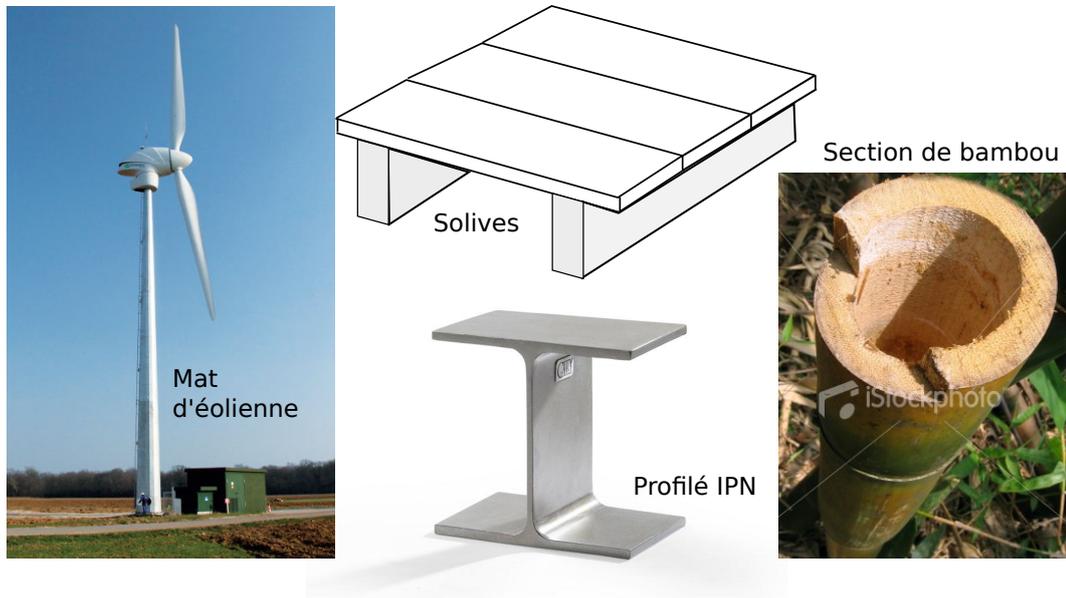


FIGURE 18 – Exemples de pièces optimisées pour travailler en flexion.

Bambou : pour augmenter la rigidité et la solidité pour une même quantité de matière, le bambou est creux.

Les mats d'éolienne sont soumis aux mêmes sollicitations de flexion. On retrouve l'avantage de la structure creuse et la section qui diminue en montant. (idem pour les cannes à pêche où la légèreté est de mise).

Lorsque la sollicitation se fait toujours dans la même direction, on oriente la section : c'est le cas pour les solives de plancher qui sont plus hautes que larges. On peut optimiser encore plus avec des profilés comme les IPN : la matière est concentrée en haut et en bas.

2 Les Autres sollicitations

2.1 La traction ou compression

2.1.1 Torseur des efforts intérieurs

Dans ce cas, le torseur de cohésion entre la partie 2 et la partie 1 de la poutre est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(G, 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

Où N est appelé effort normal. c'est l'effort qui est perpendiculaire à la section, donc parallèle à la ligne moyenne.

On rencontre ce type de sollicitation dans les charpentes, en bois ou métalliques, dans les câbles, les tirants, les poteaux... C'est la plus simple à traiter.

2.1.2 Répartition des contraintes

Si la section varie peu en fonction de x (poutre à section constante), et si on se place à au moins une largeur de section des zones d'application des efforts (hypothèse de Barré de Saint-Venant) les contraintes sont homogènes :

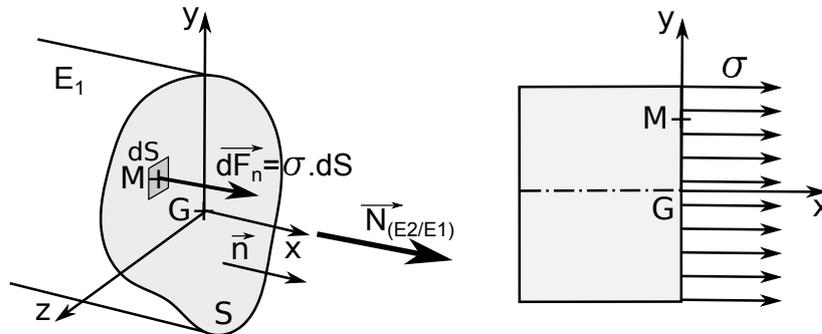


FIGURE 19 – Répartition homogène des contraintes normales σ dans une barre soumise à de la traction

Si la pièce est comprimée, la contrainte est négative, si elle est en traction, elle est positive. (La composante N aussi)

On utilise alors la relation entre N et σ , pour une section de surface S :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

En cas de singularités de section (épaulement, gorge, perçage...) la contrainte n'est plus homogène et on obtient la contrainte maximale grâce à un coefficient de concentration de contraintes K :

$$\sigma_{max} = K \cdot \sigma_{moy} = K \cdot \frac{N}{S}$$

2.1.3 Déformations

- Dans la direction de la traction :

On obtient directement la déformation longitudinale ε_{xx} (étirement ou tassement) avec le module d'Young E :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E}$$

On en déduit alors le déplacement en bout de poutre intégration :

$$d_x = \int_0^L \varepsilon_{xx} dx$$

Dans le cas où la déformation est constante, on a $d_x = L \cdot \varepsilon_{xx}$.

- Dans les directions transversales :

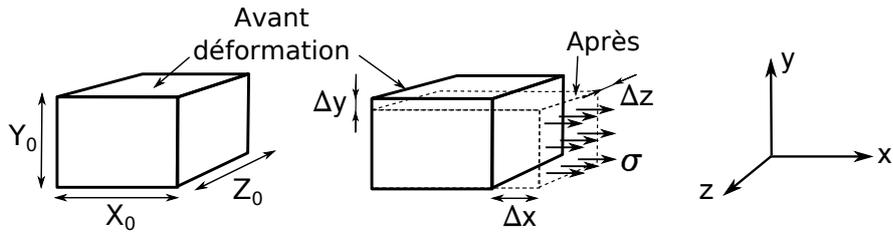


FIGURE 20 – Illustration de l’effet Poisson : si on soumet une pièce à de la traction selon x, la dimension en x augmente tandis que celles en y et z diminuent.

La déformation longitudinale ϵ_x s’accompagne de déformations transversales $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ contraires : lorsque la ligne moyenne s’étire, la section diminue, et inversement. Les deux déformations n’ont pas la même norme mais sont reliées par un coefficient nommé coefficient de Poisson ν .

$$\epsilon_{yy} = -\nu \cdot \epsilon_{xx}$$

le coefficient de Poisson dépend du matériau et vaut en général entre 0,1 et 0,5. On peut retenir que pour l’acier, $\nu_{acier} = 0,3$

2.1.4 Remarque

La forme de la section n’a pas d’importance pour une pièce en traction-compression car la contrainte ne dépend que de la surface. Cependant, pour une pièce en compression (poteaux, biellettes) très élancée ($L > 20.d$) on privilégiera une section creuse (tubulaire) pour éviter le flambement (flexion et rupture instable de la pièce).

2.2 La torsion

La torsion d’une pièce est la sollicitation qu’on rencontre dans les arbres de transmission : le moment est suivant l’axe de la poutre (axe x).

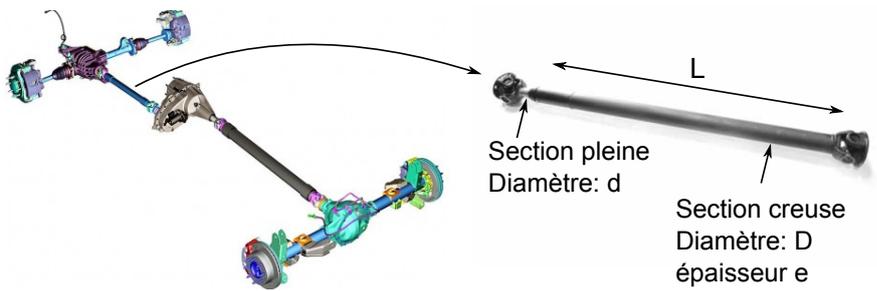


FIGURE 21 – Transmission dans un véhicule à quatre roues motrices : plusieurs arbres sont sollicités en torsion uniquement

2.2.1 Torseur des efforts intérieurs

Dans ce cas, le torseur de cohésion entre la partie 2 et la partie 1 de la poutre est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(G, 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

2.2.2 Répartition des contraintes

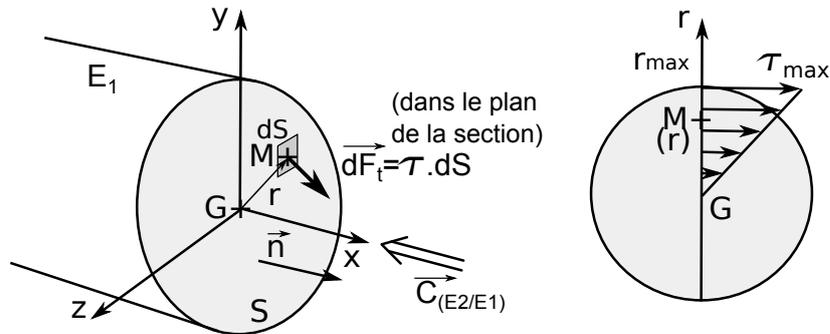


FIGURE 22 – Répartition des contraintes de cisaillement τ dans une barre soumise à de la torsion

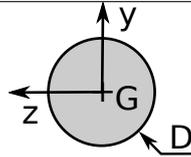
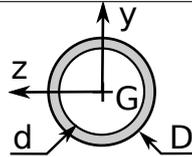
La contrainte dans la section de poutre soumise à la torsion n'est pas une contrainte normale comme en traction-compression ou en flexion. Il s'agit d'une contrainte tangentielle notée τ .

On peut montrer que la contrainte est nulle en G et qu'elle croît linéairement en allant vers l'extérieur de la section ou elle atteint son maximum τ_{max} .

Comme pour la flexion, la résistance et la raideur d'une pièce sollicitée en torsion dépend de sa géométrie. C'est le moment quadratique polaire qui intervient. On le note I_0 .

$$I_0 = \iint_S r^2 dS$$

Seules les poutres à section circulaire sont au programme pour la torsion. Leur moment quadratique polaire est donné dans le tableau suivant. On a $I_0 = 2.I_{Gz}$

| | | |
|----------|---|--|
| sections |  |  |
| I_0 | $\frac{\pi \cdot D^4}{32}$ | $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$ |

De façon similaire à la flexion, la contrainte tangentielle maximale τ_{max} est atteinte au point le plus éloigné de la ligne moyenne. Pour un arbre de diamètre D ou de rayon R :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} R = \frac{M_t}{I_0} D/2$$

| | | | |
|--|---|--------|--------------------------------|
|  | Résistance des matériaux | | Cours 3C2 3 TSI |
| | CI3-3: Dimensionnement des systèmes | | |
| | CPGE TSI - Lycée H.Parriat - Montceau-les-Mines | P : V3 | |

2.2.3 Dimensionnement

La contrainte tangentielle τ_{max} s'exprime en MPa mais elle ne peut pas être comparée à la résistance élastique du matériau R_e . La limite admissible par le matériau pour la contrainte tangentielle est appelée résistance élastique au glissement R_{eg} .

Pour les aciers, on a $0,5 \times R_e < R_{eg} < 0,8 \times R_e$.

Pour choisir le diamètre minimal de l'arbre on utilisera alors la relation :

$$\tau_{max} \leq \frac{R_{eg}}{s}$$

Où s est le coefficient de sécurité lié à l'application.

Vocabulaire : On appelle parfois résistance pratique au glissement la grandeur $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$. De la même façon, on appelle résistance pratique élastique : $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$.

Application : Déterminer le diamètre minimal d_{min} pour la section pleine de l'arbre de transmission si celui ci doit supporter un moment de torsion $M_t = 350N.m$ avec un coefficient de sécurité $s = 4$. Le matériau utilisé est un acier trempé de résistance au glissement $R_{eg} = 240MPa$.

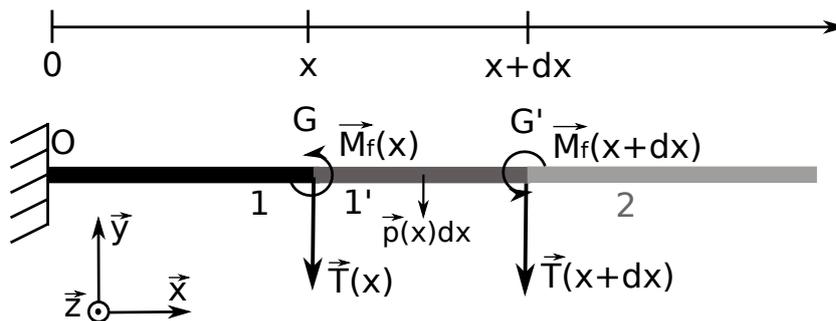


3 Principe de superposition

Quand une poutre est soumise à plusieurs sollicitations, (traction-compression, flexion, torsion), on peut traiter les cas séparément et ajouter ensuite les contraintes, les déformations, les déformées.

4 ANNEXE - Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Montrons que $\frac{dM_f(x)}{dx} = -T(x)$.



On isole le tronçon de poutre 1' de longueur dx compris entre x et $x + dx$. Il est soumis à droite de la part de 2 en G' à :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1')\}_{G'}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T(x + dx) & 0 \\ 0 & M_{f.}(x + dx) \end{array} \right\}_{G'}$$

A gauche de la part de 1 en G à :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 1')\}_G(x) = -\{\mathcal{T}(1' \rightarrow 1)\}_G(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -T(x) & 0 \\ 0 & -M_{f.}(x) \end{array} \right\}_G$$

Au centre si il y a une charge répartie (pression, poids...) à une force $d\vec{F} = p(x).dx.\vec{y}$

On écrit le théorème du moment statique suivant \vec{z} en G' :

Pour cela on déplace le torseur de cohésion entre 1 et 1' en G' : on obtient :

$$\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 1')\}_{G'}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -T(x) & 0 \\ 0 & -M_{f.}(x) + T(x).dx \end{array} \right\}_{G'}$$

Le moment en G' du à la charge répartie vaut $M_{G'}(d\vec{F}) = -p(x)dx\frac{dx}{2} = -p(x)\frac{dx^2}{2}$. Ce terme est du deuxième ordre donc négligeable.

On a donc la relation suivante :

$$-M_f(x) + T(x).dx + M_f(x + dx) = 0$$

soit : $M_f(x + dx) - M_f(x) = -T(x).dx$ donc $\frac{dM_f(x)}{dx} = -T(x)$.