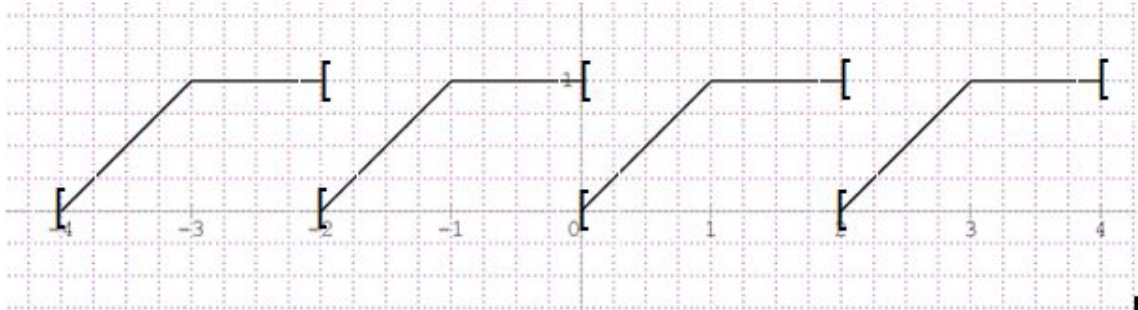


TD Chapitre 8 : Séries de Fourier - CORRECTION

Exercice 1

1. Représentation graphique :



f est 2-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 t dt + \int_1^2 1 dt \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} [t]_1^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Soit } n \geq 1 : a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 \cos(n\pi t) dt$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(n\pi t)$, on a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}$ et comme u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$, on peut utiliser la formule d'IPP :

$$\int_0^1 t \cos(n\pi t) dt = \left[\frac{t \sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} dt = 0 + \left[\frac{\cos(n\pi t)}{n^2 \pi^2} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}$$

$$\int_1^2 \cos(n\pi t) dt = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_1^2 = 0 \text{ donc } a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}$$

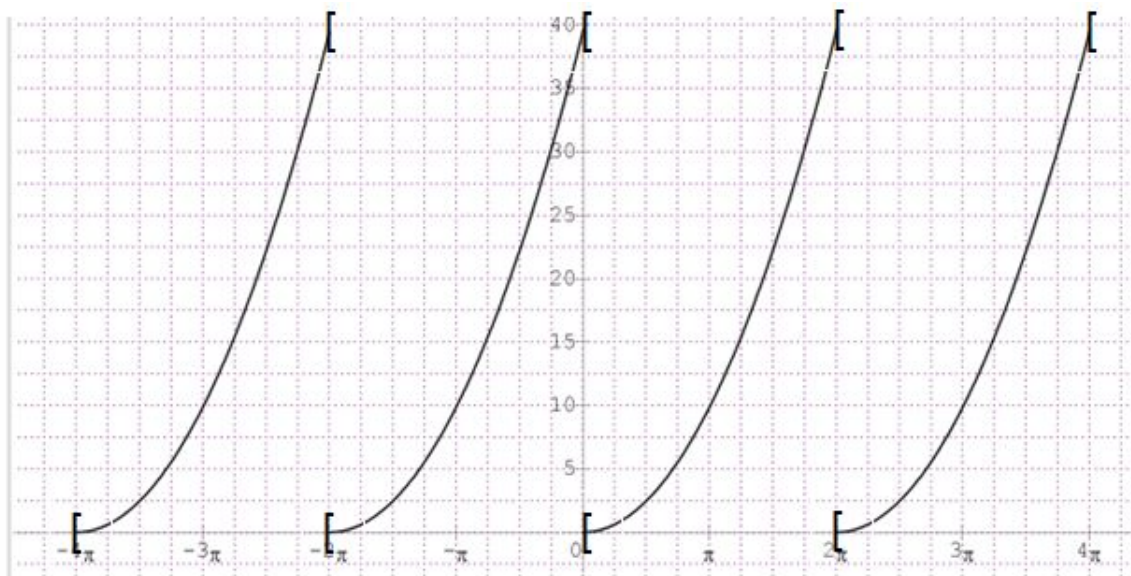
$$\text{Soit } n \geq 1 : b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt + \int_1^2 \sin(n\pi t) dt$$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(n\pi t)$, on a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}$ et comme u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$, on peut utiliser la formule d'IPP :

$$\int_0^1 t \sin(n\pi t) dt = \left[-\frac{t \cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n^2 \pi^2} \right]_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\int_1^2 \sin(n\pi t) dt = \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_1^2 = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \text{ donc } b_n = \frac{-1 + (-1)^{n+1} + (-1)^n}{n\pi} = \frac{-1}{n\pi}$$

2. Représentation graphique :



f est 2π -périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$$

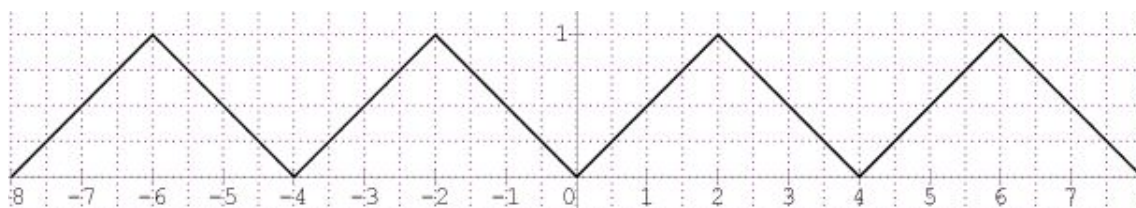
$$\text{Soit } n \geq 1 : a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) dt.$$

Deux intégrations par parties successives (par exemple) prouvent que $a_n = \frac{4}{n^2}$.

$$\text{Soit } n \geq 1 : b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(nt) dt.$$

Deux intégrations par parties successives (par exemple) prouvent que $b_n = -\frac{4\pi}{n}$.

3. Représentation graphique :



f est 4-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

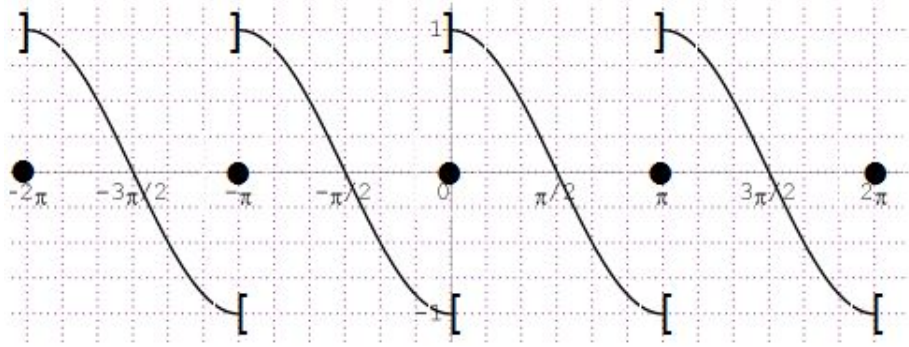
$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{2}{4} \int_0^2 \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } n \geq 1. \text{ Comme } f \text{ est paire, on a } a_n = \frac{4}{4} \int_0^2 f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) dt = \int_0^2 \frac{t}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) dt.$$

Une intégration par parties prouve que $a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$.

Soit $n \geq 1$. Comme f est impaire, on a $b_n = 0$.

4. Représentation graphique :



f est π -périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Comme f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout entier naturel n .

Comme f est impaire, pour $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(2nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \cos(t) \sin(2nt) dt.$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ donc $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

$$\text{On a donc : } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin[(2n+1)t] + \sin[(2n-1)t]) dt$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos[(2n+1)t]}{2n+1} + \frac{\cos[(2n-1)t]}{2n-1} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$-\frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(n\pi + \pi/2) - 1}{2n+1} + \frac{\cos(n\pi - \pi/2) - 1}{2n-1} \right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

5. La fonction arcsin est une bijection de $[-1; 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc pour exprimer f plus simplement, on est amenés à découper l'intervalle $[0; 2\pi[$ en

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

— Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin(\sin t) = t$.

— Pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $t - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\arcsin((\sin(t - \pi))) = t - \pi$.

En outre, $\sin(t - \pi) = -\sin t$ et comme la fonction arcsin est impaire, on a donc $\arcsin(\sin(t - \pi)) = -\arcsin(\sin t) = -f(t)$.

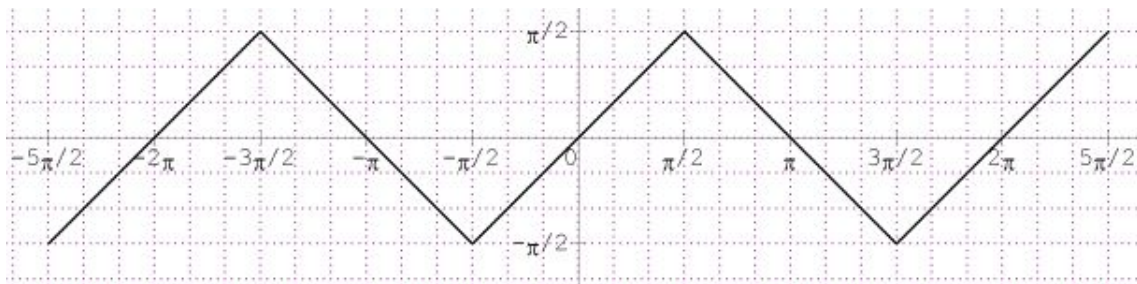
Finalement, on a $f(t) = \pi - t$.

— Pour $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, on a $t - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\arcsin((\sin(t - 2\pi))) = t - 2\pi$.

En outre, $\sin(t - 2\pi) = \sin t$ et donc $\arcsin(\sin(t - 2\pi)) = \arcsin(\sin t) = f(t)$.

Finalement, on a $f(t) = t - 2\pi$.

On en déduit la représentation graphique de f :



f est 2π -périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Comme f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout entier naturel n .

Comme f est impaire, pour $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin(nt) dt.$$

On montre facilement que $b_n = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2} - \frac{2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$.

Ainsi, si n est pair ($n = 2p$), on a $b_{2p} = \frac{2 \cos(p\pi)}{n} = \frac{2 \times (-1)^n}{n}$.

Si n est impair ($n = 2p + 1$), on a $b_{2p+1} = \frac{4 \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi n^2} = \frac{4 \times (-1)^n}{\pi n^2}$.

Exercice 2

1. f est continue et périodique, donc sa série de Fourier S_h converge vers f en tout réel t .

$\forall t \in \mathbb{R}$, on a donc $h(-t) = S_h(-t) = S_h(t) = f(t)$ donc f est paire.

2. On écarte immédiatement les courbes 1 et 4 qui ne sont pas les représentations graphiques de fonctions paires.

On écarte la courbe 3 qui est la représentation graphique d'une fonction périodique de période 1.

C'est donc la courbe 2 qui est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4; 4]$.

3. Le développement en série de Fourier de h montre que la valeur moyenne de h sur un intervalle de longueur 2 est $\frac{\pi}{2}$.

Soit m l'image de 1 par la fonction h . En utilisant la courbe 2, on voit que la valeur moyenne de h sur $[0, 2]$ est $\frac{m}{2}$ donc $h(1) = \pi$.

Il est alors immédiat que $f(t) = \pi t$ pour t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

4. h est périodique de période 2, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc on peut calculer ses coefficients de Fourier avec $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

h est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \pi t dt = \frac{\pi}{2}$$

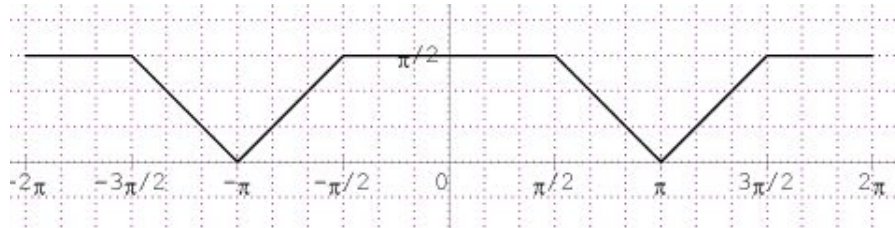
Soit $n > 0$: comme h est paire on a $a_n = \frac{4}{2} \int_0^1 f(t) \cos(n\pi t) dt = 2 \int_0^1 \pi t \cos(n\pi t) dt$

On montre facilement que $a_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$.

Pour n pair, on a $(-1)^n = 1$ et $a_n = 0$ et pour n impair égal à $2p + 1$, on a $(-1)^n = -1$ et $a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}$.

On retrouve bien les coefficients de Fourier fournis dans l'énoncé.

Exercice 3



1. a.

b. La fonction f est $2 - \pi$ périodique, continue et de classe C^1 par morceaux donc elle satisfait aux deux théorèmes de convergence (Parseval et Dirichlet).

c. On a $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ et comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier non nul n .

$$\text{En outre, on a } a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - t) dt.$$

$$\text{On a donc } a_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos(nt) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - t) \cos(nt) dt.$$

$$\text{Par exemple en intégrant par parties, on a } a_n = 2 \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)}{\pi n^2}.$$

$$\text{On a donc } S_f(t) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)}{\pi n^2} \cos(nt) \right).$$

d. Comme f est paire, $f_e^2 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi (\pi - t)^2 dt.$

$$f_e^2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. g est une somme de fonctions trigonométriques donc elle est égale à la somme de sa série de Fourier en tout réel t .

Elle vérifie de toute évidence les hypothèses du théorème de Parseval donc on a :

$$g_e^2 = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{\pi} + \frac{1^2}{\pi}\right) = \frac{9\pi^4 + 160}{64\pi^2}$$

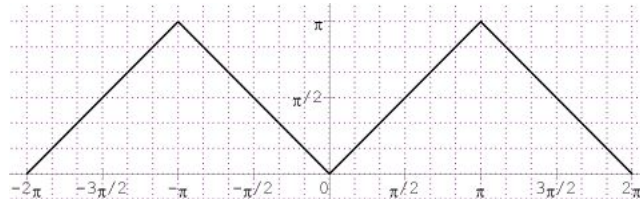
On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{1}{\pi} \cos(2t).$$

3. $\frac{g_e^2}{f_e^2} = \frac{27\pi^4 + 480}{32\pi^4} = 9,998$ arrondi à 10^{-3} .

On trouve un rapport proche de 1, ce qui n'est pas surprenant puisqu'on remarque que g est en fait la somme partielle d'ordre 2 de la série de Fourier de f !

Exercice 4



1. f est $2 - \pi$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et, comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n strictement positif et :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

On a $a_n = 0$ pour n pair et, pour n impair égal à $2p + 1$, $a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}$.

Finalement, on a $S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)x]}{(2p+1)^2}$.

2. $\int_{-\pi}^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}.$

f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

On a donc $\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Finalement, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right)$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p+2)^4} + \frac{1}{(2p+1)^4} \right)$

Les séries de terme général respectifs $\frac{1}{(2p+2)^4}$ et $\frac{1}{(2p+1)^4}$ sont convergentes (critère d'équivalence à une série de Riemann convergente) donc on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

On en déduit que $\left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$

4. f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ pour tout réel x :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)x]}{(2p+1)^2}.$$

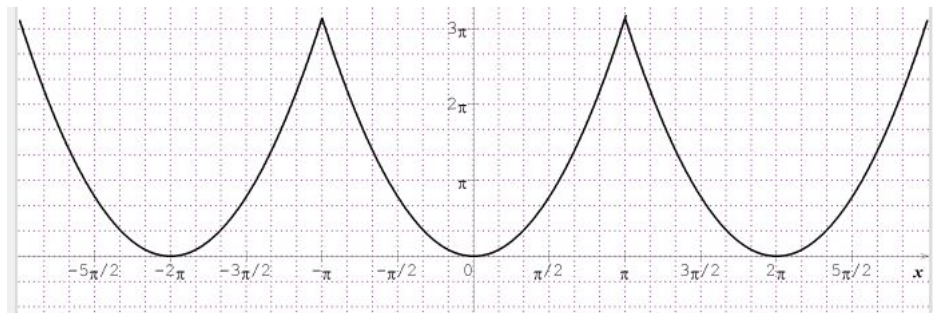
Pour $x = 0$, on a $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ soit $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p+2)^2} + \frac{1}{(2p+1)^2} \right).$$

Les séries de terme général respectifs $\frac{1}{(2p+2)^2}$ et $\frac{1}{(2p+1)^2}$ sont convergentes donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}. \text{ Finalement, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5



1. f est $2 - \pi$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et, comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n strictement positif et :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$$S_f(x) = \frac{\pi^3}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$$

2. $\int_{-\pi}^\pi x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5}.$

f est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x^4 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

$$\text{On a donc } \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\text{Finalement, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3. f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ pour tout réel x :

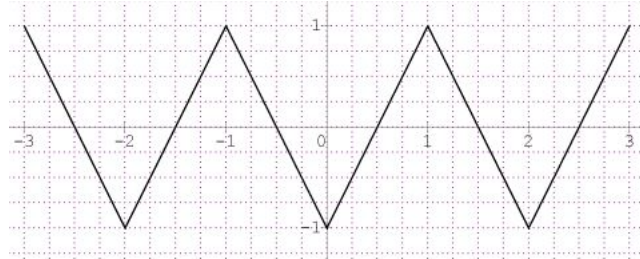
$$\forall x \in [-\pi; \pi], \text{ on a } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Pour $x = \pi$, on a $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2 et telle que $f(t) = 2t - 1$ si t appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

1. Représentation graphique :



2. f est 2-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et paire. On a $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (2t - 1) dt = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a_n = \frac{4}{2} \int_0^1 f(t) \cos(\pi n t) dt = 2 \int_0^1 (2t - 1) \cos(\pi n t) dt = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}.$$

On remarque que pour n pair, $a_n = 0$ et pour n impair égal à

$$2p + 1, a_{2p+1} = -\frac{8}{\pi^2 (2p + 1)^2}.$$

3. f est 2-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$: elle satisfait à toutes les hypothèses du théorème de Dirichlet :

$$f(t) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p + 1)^2} \cos((2p + 1)\pi t) \text{ pour tout réel } t.$$

4. On a $u_p \sim \frac{1}{4p^2}$ et $\frac{1}{p^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général u_p converge.

$$\text{Pour } t = 0, \text{ on a } f(0) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p + 1)^2} \text{ soit :}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 7*

1. f est 2π -périodique et continue par morceaux : on peut calculer ses coefficients de Fourier avec $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{at} dt = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2}.$$

$$\text{Donc } a_0 = \frac{\text{sh}(a\pi)}{a\pi}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = \frac{a(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

$$\text{Donc on a } a_n = \frac{2a(-1)^n \text{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$.

En faisant un changement de variable $u = -t$ dans les intégrales qui permettent le calcul des coefficients de Fourier de f_{-a} , on montre facilement que les coefficients de Fourier de f_{-a} sont les mêmes que ceux de f_a .

2. Les fonctions f_a et f_{-a} sont 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc, en utilisant le théorème de Dirichlet et le fait que ces fonctions soient continues sur $[-\pi; \pi]$:

$$\forall t \in [-\pi; \pi], f_{-a}(t) = f_a(t) = \frac{2a \text{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos(nt).$$

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2 \text{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a \text{sh}(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \cos(nt).$$

3. Les fonctions f_a et f_{-a} sont 2π -périodiques et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Comme ces fonctions sont continues en 0, on a, d'après le théorème de Dirichlet :

$$f_a(0) + f_{-a}(0) = \frac{2 \text{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a \text{sh}(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a \text{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

$\lim_{t \rightarrow \pi^-} f_a(t) = e^{a\pi}$, $\lim_{t \rightarrow \pi^+} f_a(t) = e^{-a\pi}$, $\lim_{t \rightarrow \pi^-} f_{-a}(t) = e^{-a\pi}$ et $\lim_{t \rightarrow \pi^+} f_{-a}(t) = e^{a\pi}$
donc, d'après le théorème de Dirichlet :

$$2 \text{ch}(a\pi) = \frac{2 \text{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a \text{sh}(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \cos(n\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2 \text{th}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

Exercice 8*

1. ϕ est $2 - \pi$ -périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Comme ϕ est paire, on a $b_n = 0$ pour tout entier naturel n .

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \cos(rt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(rt)}{r} \right]_0^\pi = \frac{\sin(r\pi)}{r\pi}.$$

Comme ϕ est paire, pour $n \geq 1$, on a

$$n_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(rt) \cos(nt) dt.$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ donc $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

On a donc : $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos[(n+r)t] + \cos[(n-r)t]) dt$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin[(n+r)t]}{n+r} + \frac{\sin[(n-r)t]}{n-r} \right]_0^\pi = \frac{\sin[(n+r)\pi]}{n+r} + \frac{\sin[(n-r)\pi]}{n-r}$$

On montre facilement que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin(\alpha)$ donc :

$$a_n = \frac{(-1)^n \sin(r\pi)}{\pi} \left(\frac{-1}{n-r} + \frac{1}{n+r} \right) = \frac{(-1)^n \sin(r\pi)}{\pi} \left(\frac{-2r}{n^2 - r^2} \right)$$

La série de Fourier de ϕ est :

$$\frac{\sin(r\pi)}{r\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \sin(r\pi)}{\pi} \left(\frac{-2r}{n^2 - r^2} \right) \right) \cos(nt)$$

2. ϕ est en outre continue en 0 donc sa série de Fourier en 0 converge vers $\phi(0) = 1$.

On a donc $1 = \frac{\sin(r\pi)}{r\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \sin(r\pi)}{\pi} \left(\frac{-2r}{n^2 - r^2} \right) \right)$

Soit, en divisant les deux membres de cette égalité par $\frac{\pi}{\sin(\pi r)}$, l'égalité attendue :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi r)} = \frac{1}{r} - 2r \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - r^2}$$

Exercice 9*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{1 + \cos^2 t}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$: $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ et donc $f(t + \pi) = f(t)$: f est bien π -périodique.
2. f est π -périodique et de classe C^1 par morceaux, on peut calculer ses coefficients de Fourier, et on a $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Soit $n \geq 2$: comme f est paire, on a

$$a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[(2n+2)t] + 6\cos(2nt) + \cos[(2n-2)t]}{1 + \cos^2 t} dt$$

Or, $\cos[(2n+2)t] + 6\cos(2nt) + \cos[(2n-2)t] =$

$$\cos(2nt)\cos(2t) - \sin(2nt)\sin(2t) + 6\cos(2nt) + \cos(2nt)\cos(2t) + \sin(2nt)\sin(2t)$$

$$= 2\cos(2nt)(\cos(2t) + 3) = 2\cos(2nt)(2\cos^2 t + 2) = 4\cos(2nt)(1 + \cos^2 t).$$

Ainsi, $a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = \frac{16}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) dt = \frac{16}{\pi} \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi/2} = 0.$

3. On calcule d'abord a_0 :

f est 2π -périodique et paire, donc

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos^2 t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 t} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^2 t}} dt$$

On pose $u = \tan t$, on a donc $du = \frac{dt}{\cos^2 t}$ et $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{2+u^2}$

On pose $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$ et alors immédiatement $a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On écrit l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence trouvée précédemment :

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 - 2\sqrt{2} = \alpha_1 \text{ ou } x = -3 + 2\sqrt{2} = \alpha_2$$

Ainsi, il existe A et B réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$.

La fonction f est 2π -périodique, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A\alpha_1^n + B\alpha_2^n) \cos(2nt)$$

Pour $t = 0$, on a $f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A\alpha_1^n + B\alpha_2^n)$.

Or $|\alpha_1| > 1$ et $|\alpha_2| < 1$ donc la série de terme général α_1^n diverge et celle de terme général α_2^n converge.

Si $A \neq 0$ alors la série égale à $f(0)$ diverge : on en déduit que $A = 0$ et

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + B \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_2^n.$$

On a donc $\frac{1-\sqrt{2}}{2} = B \frac{1}{1-\alpha_1}$ soit $B = 6 - 4\sqrt{2}$. En déduire que, pour tout

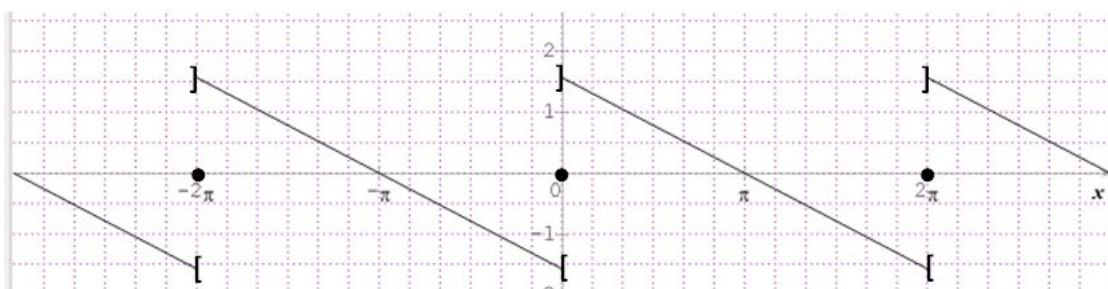
$$t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + (4 - 3\sqrt{2}) \sum_{n=1}^{+\infty} (-3 + 2\sqrt{2})^{n-1} \cos(2nt).$$

Exercice 10*

Soit f une fonction 2π -périodique, impaire vérifiant :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ pour } x \in]0 ; \pi[.$$

Représentation graphique :



1. f est 2π -périodique, impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{n}$.

La série de Fourier de f en x est donc $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

En outre, f est de classe C^1 par morceaux et on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, donc $S(x) = f(x)$.

Pour tout $x_0 \in \{2k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et donc

$S(x_0) = 0 = f(x_0)$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

2. Soit g 2π -périodique, impaire, continue et définie par :

g est affine sur $[0; 1]$ et $\forall x \in [1; \pi]$, $g(x) = S(x)$.

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en 1, on a donc $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{\pi-1}{2}$.

En outre, g est impaire donc $g(0) = 0$.

Finalement, on a $\begin{cases} g(x) = \frac{\pi-1}{2}x \text{ pour } x \in [0; 1] \\ g(x) = f(x) \text{ pour } x \in [1; \pi] \end{cases}$

Représentation graphique :



g est 2π -périodique, impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a donc } b_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{\pi-1}{2} \right) x \sin(nx) dx + \int_1^\pi \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \sin(nx) dx \right)$$

$$\text{On montre par suite que } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

La série de Fourier de g en x est donc $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx)$.

g est 2π -périodique, impaire, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$: on peut donc appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = T(x).$$

En particulier, on a $g(1) = T(1)$. Or, $g(1) = f(1) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et

$$T(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 :$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

3. g est continue 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n(f))^2$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\pi-1}{2} \right)^2 x^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_1^\pi \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\pi-1}{2} \right)^2 x^2 dx = \frac{(\pi-1)^2}{12\pi} \text{ et } \frac{1}{\pi} \int_1^\pi \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx = \frac{(\pi-1)^3}{12\pi} \text{ Donc}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}$$

Exercice 11*

1. $a_0(f') = \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0$ car f est 2π -périodique.

On montre facilement à l'aide d'une intégration par parties que pour $n \geq 1$, on a $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.

2. Les fonctions f et f' sont 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc leur appliquer le théorème de Parseval :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f))^2 + (b_n(f))^2 \right) \leq \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f'))^2 + (b_n(f'))^2 \right) = \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt$$

3. Soit f telle que $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt$.

On applique le théorème de Parseval à ces deux fonctions, on a

$$\text{donc : } \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - 1) \left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2 \right) = 0.$$

On a donc, pour $n > 1$, $a_n(f) = b_n(f) = 0$.

Comme f est 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_1(f) \cos t + b_1(f) \sin t.$$

Réciproquement, on montre facilement que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t \text{ vérifie l'égalité } \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt.$$