

	COURS RESSOURCE CINETIQUE DES SOLIDES	
séquence : A	Comment la forme d'un solide influence-t-elle son inertie?	

CENTRE D'INTERETS	CI3-1: Identification et modélisation dynamique des systèmes
Pré-requis	✓ notion de masse ✓ opérations de base sur les matrices carrées
Savoirs et savoirs-faire associés	S4 Comportement des Systèmes : S412 Actions mécaniques, S4122 Approche dynamique : Grandeurs inertielles : centre d'inertie, masse, opérateur d'inertie, matrice associée et théorème de Huygens.
Compétences principales en SII	B-MODELISER
Compétences visées	B1 Identifier et caractériser les grandeurs physiques agissant sur un système. B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement
	Table des matières

Cinétique des solides

A puissance pourtant moindre, une moto accélère bien plus vite qu'un camion. De la même façon, une hélice d'avion atteint sa vitesse nominale en moins de temps que ne le fait le rotor d'un hélicoptère. L'inertie est à l'origine de ces phénomènes.

1 Masse et centre d'inertie

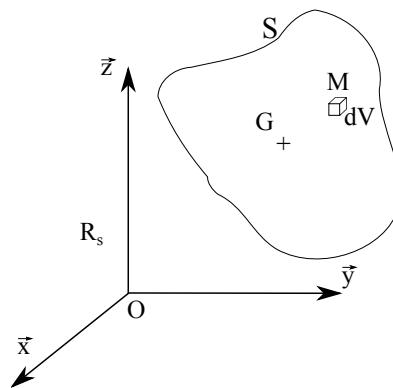


FIGURE 1 – Solide S et son repère associé R_S .

1.1 Définitions

- **Masse** : La masse d'un solide S caractérise la quantité de matière qui le compose. Elle ne dépend pas du temps en mécanique générale.
La masse est additive : si trois solides S_1 , S_2 et S_3 ont pour masse m_1 , m_2 et m_3 alors la masse totale m vaut $m = m_1 + m_2 + m_3$

Par conséquent, la masse d'un solide S peut se calculer par l'intégrale :

$$m = \iiint_S dm = \iiint_S \rho(M).dV$$

où dm est une masse élémentaire de S , $\rho(M)$ est la masse volumique locale et dV un volume élémentaire de S .

Remarquons que la masse volumique $\rho(M)$ n'est pas nécessairement constante sur le solide et dépend *a priori* du point M .

- **Centre d'inertie G** : Son vecteur position $\overrightarrow{OG}$ est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint_S \overrightarrow{OM}.dm = \frac{1}{m} \iiint_S \overrightarrow{OM}.\rho(M).dV \quad (1)$$

Remarques :

- Si le solide S est indéformable, alors le centre d'inertie G est un point fixe de S .
- Si le solide présente un plan de symétrie (géométriquement et pour la répartition des masses), alors G appartient à ce plan.
- Le centre d'inertie est un point fictif : il n'appartient pas forcément matériellement au solide (voir solide S_3 , fig ??).
- Hormis pour les solides homogènes de forme simple (sphères, cylindres, parallélépipèdes...) l'utilisation de logiciels de CAO simplifie l'obtention du centre d'inertie d'un solide.
- Le centre de gravité est le centre d'inertie lorsque la pesanteur est considérée uniforme (c'est le cas en mécanique générale).

1.2 Centre d'inertie d'un ensemble de solides

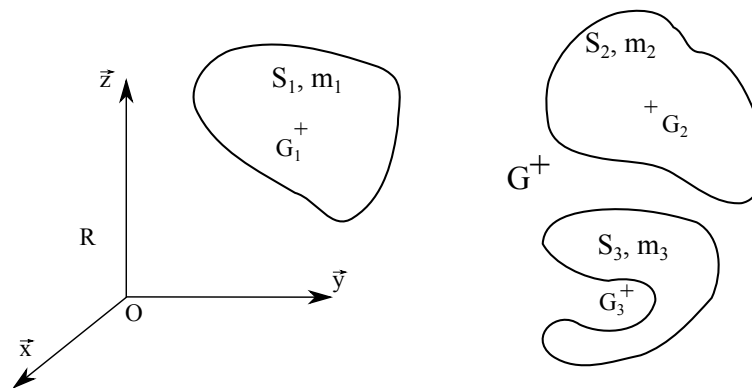


FIGURE 2 – Plusieurs solides

Le centre d'inertie d'un ensemble de solides, par exemple S_1 , S_2 et S_3 , est donné par :

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 m_i \vec{OG}_i} \quad \heartsuit \heartsuit \heartsuit \quad (2)$$

Remarques :

- On peut ainsi trouver rapidement le centre d'inertie d'un solide composé de plusieurs formes simples.
- Si les solides de l'ensemble étudié bougent les uns par rapport aux autres le centre d'inertie dépend alors du temps.

2 Moments d'inertie

Dans l'exemple du camion et de la moto pris au début de ce chapitre, on a affaire à des systèmes en translation et c'est la masse qui limite directement l'accélération. Mais pour les objets en rotation (rotor d'hélicoptère par exemple), le comportement dépendra non seulement de la masse, mais aussi de la forme des solides. Cet ensemble, masse-géométrie, est quantifié par les moments et produits d'inertie.

2.1 Moment d'inertie par rapport à une droite

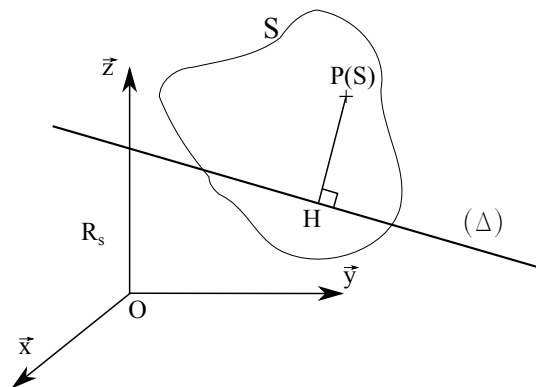


FIGURE 3 – Calcul du moment d'inertie par rapport à une droite (Δ)

Le moment d'inertie I_{Δ} de S par rapport à la droite (Δ) est le résultat de l'intégrale :

$$I_{\Delta} = \iiint_S \overrightarrow{HP(S)}^2 . dm \quad (3)$$

Remarques :

- I_{Δ} est positif.
- I_{Δ} a pour unité : $kg.m^2$

2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe de R_S

Lorsqu'on se place dans un repère cartésien $R_S = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé au solide S, on peut écrire les moments d'inertie par rapport aux axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ comme suit :

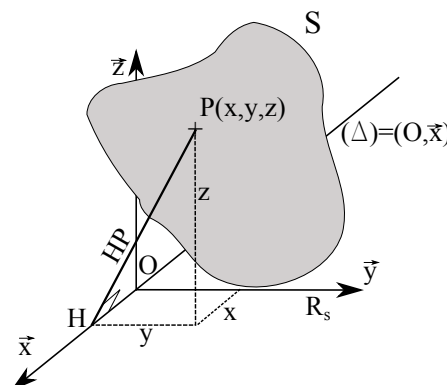


FIGURE 4 – Calcul du moment d'inertie par rapport à la droite $(O, \vec{x})$

D'après l'équation ??, on a $I_{(O, \vec{x})} = \iiint_S \overrightarrow{HP}^2 . dm$. Or ici $\overrightarrow{HP}^2 = y^2 + z^2$, donc :
 $I_{(O, \vec{x})} = \iiint_S (y^2 + z^2) . dm$, moment d'inertie de S par rapport à $(O, \vec{x})$.

De la même façon, on obtient :

$I_{(O, \vec{y})} = \iiint_S (x^2 + z^2) . dm$, moment d'inertie de S par rapport à $(O, \vec{y})$ et

$I_{(O, \vec{z})} = \iiint_S (x^2 + y^2) . dm$, moment d'inertie de S par rapport à $(O, \vec{z})$.

2.3 Théorème de Huygens

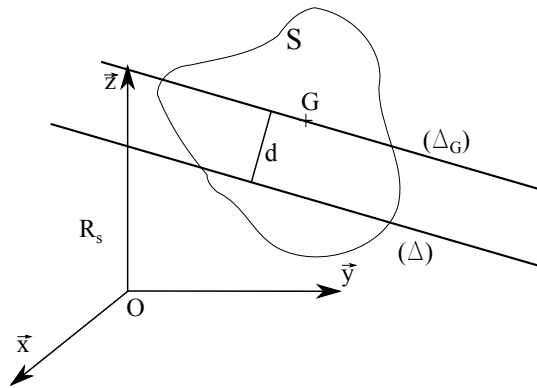


FIGURE 5 – Passage de I_{Δ_G} à I_{Δ}

Enoncé du théorème de Huygens : Si on connaît le moment d'inertie I_{Δ_G} du solide S de masse m par rapport à un axe (Δ_G) passant par son centre d'inertie G , alors on obtient le moment d'inertie I_{Δ} par rapport à un axe (Δ) parallèle à (Δ_G) et distant de d par la formule :

$$\boxed{I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + m \cdot d^2} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit \quad (4)$$

Remarques :

- Cette équation n'est valable qu'entre un axe passant par G et un axe parallèle. Elle ne l'est pas entre deux axes parallèles quelconques.
- Pour un solide S donné, I_{Δ} est donc minimal lorsque l'axe (Δ) passe par le centre d'inertie G .

2.4 Signification physique des moments d'inertie

Le moment d'inertie autour d'un axe est à la rotation autour d'un axe fixe ce que la masse est à la translation :

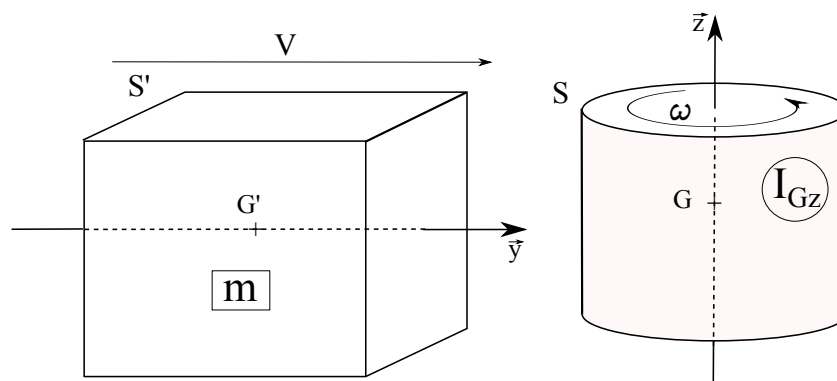


FIGURE 6 – Analogie masse - moment d'inertie

C'est la masse m de S' qui va rendre difficile de le faire accélérer rapidement en translation. C'est le moment d'inertie $I_{Gz} \equiv I_{(G,z)(S)}$ qui va jouer sur la difficulté à accélérer la rotation de S .

3 Matrice d'inertie

Lorsqu'on veut étudier le comportement dynamique d'un solide en mouvement quelconque, la connaissance de sa masse et de ses moments d'inertie autour des trois axes du repère qui lui est associé ne suffit pas. Il faut aussi connaître 3 produits d'inertie...

On regroupe les données d'inertie d'un solide S dans une matrice 3×3 symétrique appelée matrice d'inertie. Elle dépend du point d'expression : si on la calcule au point O , on la note $\mathcal{I}_{O,S}$. elle est souvent écrite sous la forme :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarque : Il est nécessaire de spécifier le repère utilisé en bas à droite. $\mathcal{I}_{O,S}$ dépendant de la géométrie du solide S , R_S est généralement un repère accroché au solide (ie fixe par rapport au solide).

- Les termes de la diagonale A , B et C sont les *moments d'inertie* par rapport aux axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ ♥♥♥ (vocabulaire) :

A = moment d'inertie de S autour de l'axe $(O, \vec{x})$ ($A = I_{(O,\vec{x})(S)} = \iiint_S (y^2 + z^2).dm$),

$B = I_{(O,\vec{y})(S)} = \iiint_S (x^2 + z^2).dm$, moment d'inertie de S autour de l'axe $(O, \vec{y})$ et

$C = I_{(O,\vec{z})(S)} = \iiint_S (x^2 + y^2).dm$, moment d'inertie de S autour de l'axe $(O, \vec{z})$.

- Les termes hors diagonale D , E et F sont appelés *produits d'inertie* ♥♥ (vocabulaire) :

$F = P_{xy} = \iiint_S x.y.dm$, produit d'inertie de S par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$,

$E = P_{xz} = \iiint_S x.z.dm$, produit d'inertie de S par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ et

$D = P_{yz} = \iiint_S y.z.dm$, produit d'inertie de S par rapport au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

La matrice ci-dessous résume la définition de chaque terme de $\mathcal{I}_{O,S}$.

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} A = \iiint_S (y^2 + z^2).dm & -F = -\iiint_S x.y.dm & -E = -\iiint_S x.z.dm \\ -F = -\iiint_S x.y.dm & B = \iiint_S (x^2 + z^2).dm & -D = -\iiint_S y.z.dm \\ -E = -\iiint_S x.z.dm & -D = -\iiint_S y.z.dm & C = \iiint_S (x^2 + y^2).dm \end{pmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

Remarque : Des produits d'inertie non nuls indiquent que si on le fait tourner autour des axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ ou $(O, \vec{z})$ choisis pour écrire la matrice $\mathcal{I}_{O,S}$, alors la rotation engendre des moments suivant les axes orthogonaux à la rotation. Le solide n'est pas équilibré autour des axes du repère choisi.

4 Base principale d'inertie

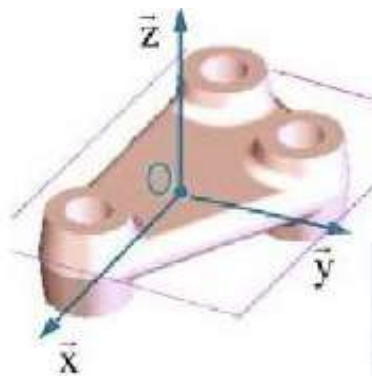
La matrice d'inertie est symétrique positive. Elle peut donc être diagonalisée. Il existe une base B_0 telle que dans cette base :

$$\mathcal{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{pmatrix}_{B_0}$$

Les moments d'inertie A_0 , B_0 et C_0 sont appelés *moments principaux d'inertie* et la base B_0 *base principale d'inertie*. ♡

Remarque : On peut parfois connaître une ou les directions principales d'inertie en fonction de la géométrie d'un solide :

- Si le solide a un plan de symétrie, alors la normale à ce plan est une direction principale d'inertie. ♡♡

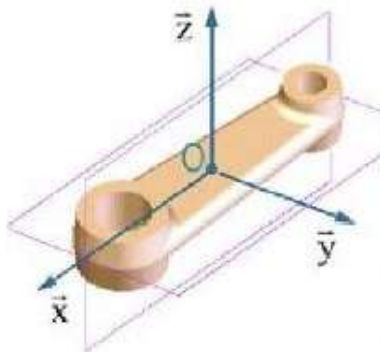


$(O, \vec{z})$ est ici une direction principale d'inertie donc :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

(produits d'inertie nuls sur la colonne et la ligne des z (3ième))

- Si le solide a deux plans de symétrie orthogonaux, alors on a deux (les deux normales) et donc les trois directions principales d'inertie (troisième direction = intersection des plans). ♡♡



$(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ sont ici une direction principale d'inertie donc :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

(produits d'inertie nuls sur la colonne et la ligne des y (2ième) et sur celles des z (3ième))

- Si le solide a un axe de symétrie $(O, \vec{z})$ alors il a 2 plans de symétrie orthogonaux de normales $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ quelconques ♡♡



$(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ sont ici 2 directions principales d'inertie équivalentes donc :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

5 Théorème de Huygens Généralisé

Le Théorème de Huygens permet de lier les matrices d'inerties en G (centre d'inertie) et en un point A quelconque.

$$\text{Si } \overrightarrow{GA} \text{ (ou } \overrightarrow{AG}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \text{ alors } \mathcal{I}_{A,S} = \mathcal{I}_{G,S} + m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -x.y & -x.z \\ -x.y & x^2 + z^2 & -y.z \\ -x.z & -y.z & x^2 + y^2 \end{pmatrix}_B \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Attention : cette relation ne permet pas de passer d'un point A quelconque vers un point B quelconque. Il faut pour cela **passer par le point G** : $\mathcal{I}_{B,S} = \mathcal{I}_{G,S} + \mathcal{I}_B^H = \mathcal{I}_{A,S} - \mathcal{I}_A^H + \mathcal{I}_B^H$

6 Matrices d'inertie de quelques géométries simples

Les matrices d'inertie des pièces d'un système sont rapidement obtenues grâce aux logiciels de CAO.

Toutefois, il est parfois utile de savoir évaluer grossièrement la matrice d'inertie d'un solide, à partir d'un assemblage de formes simples..

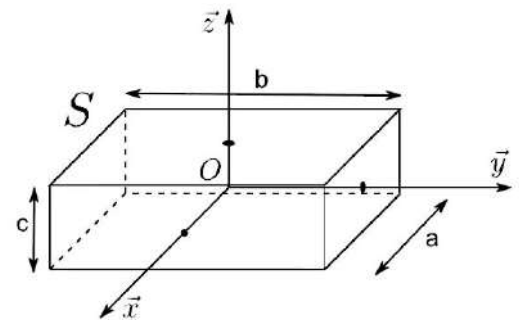
6.1 Pavé

Matrice d'inertie du pavé de centre d'inertie O :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}_{R_S}$$

Remarquez qu'il est possible d'en déduire la matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire en prenant $c = 0$ par exemple.

Le théorème de Huygens permet d'obtenir la matrice en tout autre point.



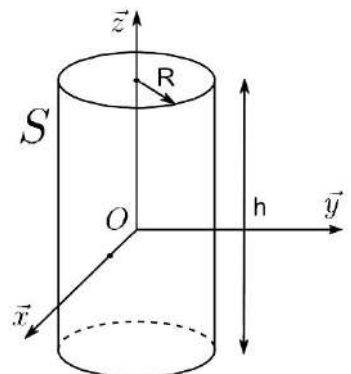
6.2 Cylindre de révolution

Matrice d'inertie du cylindre de centre d'inertie O :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{R_S}$$

Justifier la forme de la matrice :

Pour obtenir la matrice d'inertie d'un cylindre creux, il suffit de soustraire à la matrice d'inertie du cylindre plein, la matrice correspondant à la matière enlevée :



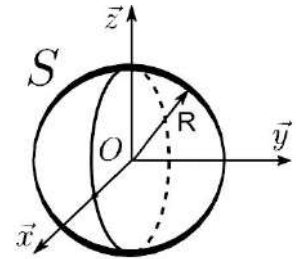
$$\mathcal{I}_{O,\text{cylindre creux}} = \mathcal{I}_{O,\text{cylindre plein}} - \mathcal{I}_{O,\text{cylindre enlevé}}$$

(Attention dans ce cas à la masse que vous utilisez pour chaque morceau)

6.3 Sphère

Matrice d'inertie de la sphère de centre d'inertie O :

$$\mathcal{I}_{O,S} = \begin{pmatrix} 2.m.\frac{R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2.m.\frac{R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2.m.\frac{R^2}{5} \end{pmatrix}_{R_S}$$



justifier la forme de la matrice :

Vocabulaire : Lorsqu'on écrit la matrice principale d'inertie au centre d'inertie, on appelle les moments d'inertie **moments centraux d'inertie** (ils sont minimaux).

6.4 Autres formes

voir le complément en fin de polycopié.

Application : Retrouver la matrice d'inertie $\mathcal{I}_{G,S}$ en G d'une barre S de longueur L alignée avec l'axe $\vec{X}$ à partir de la matrice d'un pavé et à partir de celle d'un cylindre de révolution.

Retrouver ensuite la matrice $\mathcal{I}_{A,S}$ en A à l'aide du théorème de Huygens généralisé.

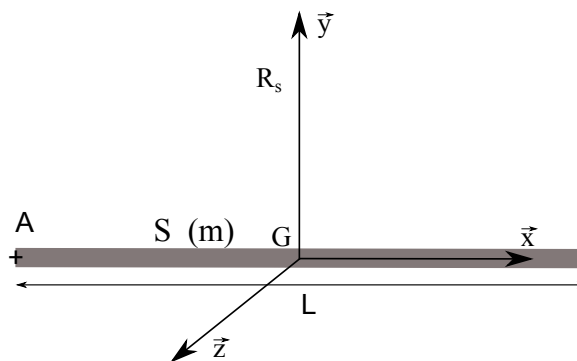


FIGURE 7 – Paramétrage de la barre

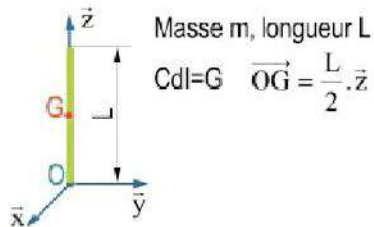
7 Association de solides

Pour obtenir la matrice d'inertie d'un ensemble de solides, il faut écrire toutes les matrices d'inertie dans une même base et en un même point. Pour les déplacements, on utilise le théorème de Huygens (attention, il faut partir du centre d'inertie pour l'appliquer).

8 Compléments

8.1 Matrice d'inertie de formes filaires

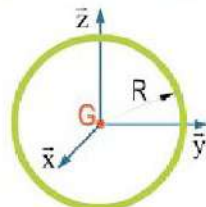
● Tige rectiligne



$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

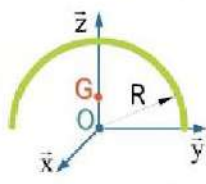
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

● Anneau filaire



$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

● Demi anneau filaire

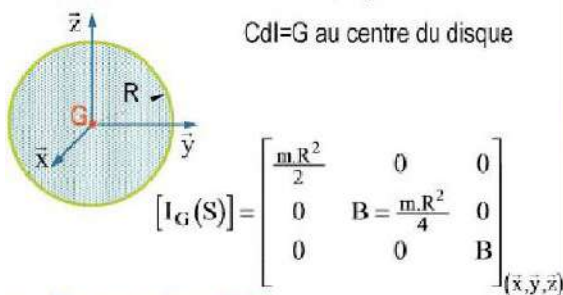


$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

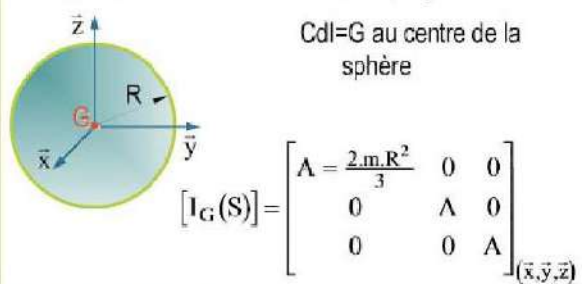
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} mR^2 - \frac{4mR^2}{\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} - \frac{4mR^2}{\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

8.2 Matrice d'inertie de formes surfaciques

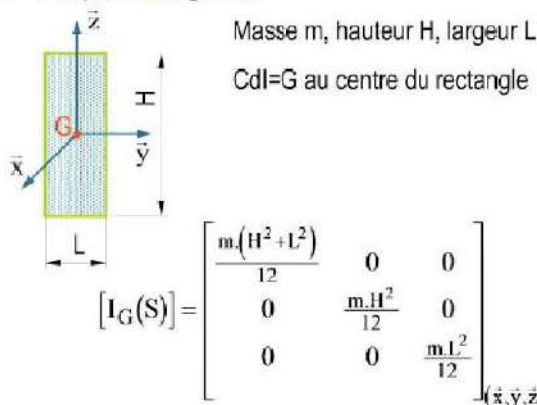
● Disque



● Sphère creuse



● Plaque rectangulaire



● Cylindre-jante

