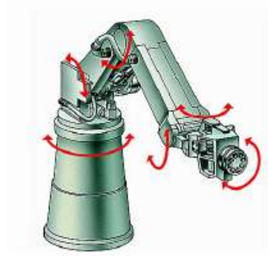
COURS RESSOURCE

# DYNAMIQUE DES SOLIDES



séquence : A — **Comment relier efforts et mouvements dans un système?**

| | |
|---|---|
| CENTRE D'INTERETS | **CI3-1: Identification et modélisation dynamique des systèmes** |
| Pré-requis | ✓ Cinématique et Statique des solides.<br>✓ Cinétique des solides. |
| Savoirs et savoirs-faire associés | S4 Comportement des Systèmes :<br>S412 Actions mécaniques, S4122 Approche dynamique :<br>Grandeurs inertielles : centre d'inertie, masse, opérateur d'inertie, matrice associée et théorème de Huygens. |
| **Compétences principales en SII** | B-MODELISER |
| **Compétences visées** | B1 Identifier et caractériser les grandeurs physiques agissant sur un système.<br>B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement |

## Table des matières

# Dynamique des solides

## 1 Introduction du Principe Fondamental de la Dynamique

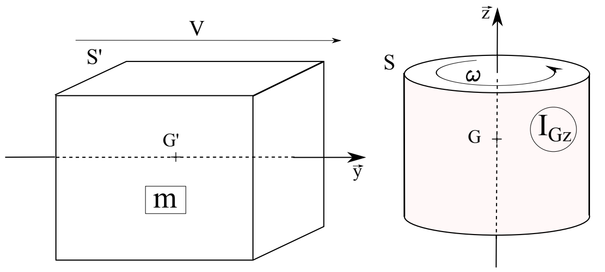
Le Principe fondamental de la dynamique (**PFD**) permet d'expliquer le comportement d'un système de solides indéformables en mouvement. Il relie les grandeurs de la statique (Forces, moments) à celles de la cinématique (vitesses, accélérations linéaires et angulaires).

Il permet alors de résoudre trois types de problèmes :

- On connaît les actions mécaniques qui s'exercent sur les solides : le PFD permet alors d'en déduire la cinématique du système.
- On souhaite que le système ait une cinématique bien définie : le PFD va alors permettre de déterminer les actions mécaniques que doivent exercer les actionneurs.
- On connaît une partie des actions mécaniques et une partie des vitesses : le PFD sert à retrouver les données manquantes, actions mécaniques et grandeurs cinématiques.

**Remarque 1 :** Pour résoudre ces problèmes on aura aussi recours à d'autres méthodes, issues du PFD, vues par la suite.

**Remarque 2 :** Pour obtenir les équations de mouvements et les fonctions de transfert de nombreux systèmes, on utilise, en asservissement, des cas particuliers du PDF (voir figure ci-dessous).




- Solide $S'$ de masse $m$ en translation rectiligne d'axe $(O\vec{y})$ :

  Alors on a :

  $$\sum \overrightarrow{F_{ext \to S'}}.\vec{y} = m.\Gamma(G'/R_0) \qquad \textit{on retient :} \boxed{F = m.a} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

  Où $\Gamma(G'/R_0 = \frac{dV}{dt}$ est l'accélération de $S'$ suivant l'axe de translation.

- Solide $S$ de moment d'inertie $I_{Gz}$ en rotation autour de l'axe $(G\vec{z})$ :

  Alors on a :

  $$\sum \overrightarrow{M_{G,ext \to S}}.\vec{z} = I_{Gz}.\frac{d\omega}{dt} \qquad \textit{on retient :} \boxed{C = J.\frac{d\omega}{dt}} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

On remarque la similitude entre les deux équations : $F \leftrightarrow C$, $m \leftrightarrow J$ et $V \leftrightarrow \omega$.

Ces deux équations montrent que l'inertie s'oppose aux accélérations.

Pour des mouvements de solides quelconques et des mécanismes plus complexes, le PFD s'écrit avec des torseurs. La suite permet d'obtenir pas à pas l'écriture torsorielle du PFD.

# 2 Torseur Cinétique

## 2.1 Définition

Le torseur cinétique du système matériel S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est défini par :

$$\{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{r} \overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_0}} = \int_S \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}\, dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M,S/\mathcal{R}_0}}\, dm \end{array} \right\}_A$$

$\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_0}}$ est la résultante cinétique de S par rapport à $\mathcal{R}_0$ (ou quantité de mouvement).
$\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}}$ est le moment cinétique au point A de S par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Le calcul de ses intégrales n'est en pratique jamais fait. On utilise les formules qui vont suivre :

La quantité de mouvement d'un point de masse $m$ et de vitesse $V$ est $p = m.V$. Pour le solide S, on peut montrer que :

$$\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_0}} = m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

On peut donc écrire le torseur cinétique :

$$\{\mathscr{C}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_A \qquad \heartsuit\heartsuit$$

Comme pour tout torseur on peut le déplacer :

- Comme pour les autres torseurs, la résultante cinétique ne dépend pas du point où on écrit le torseur cinétique.
- Le moment cinétique déplacé s'obtient ainsi :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

## 2.2 Expression du moment cinétique

$\vec{p}$ fait intervenir la masse de S et la vitesse de son centre d'inertie. $\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}}$ fait lui intervenir la matrice d'inertie de S et la vitesse de rotation de S. Si A est un point lié à S le moment cinétique de S en A vaut :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \mathscr{I}_{A,S}\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/\mathcal{R}_0}}$$

Cas particuliers :♡♡♡

- si on calcule le moment cinétique au centre d'inertie G :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G,S/\mathcal{R}_0}} = \mathscr{I}_{G,S}\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

- si le point A est fixe dans $\mathcal{R}_0$ :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \mathscr{I}_{A,S}\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

### 2.3 Cas de plusieurs solides :

Soit un système $\Sigma$ de n solides $S_1$, $S_2$, ... $S_3$. Le torseur cinétique de $\Sigma$ est égal à la somme des torseurs cinétiques des n solides **tous exprimés au même point**.

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/\mathcal{R}_0}\}_A = \{\mathscr{C}_{S_1/\mathcal{R}_0}\}_A + \{\mathscr{C}_{S_2/\mathcal{R}_0}\}_A + ... + \{\mathscr{C}_{S_n/\mathcal{R}_0}\}_A$$

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/\mathcal{R}_0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{\Sigma/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{p_{S_1/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{p_{S_2/\mathcal{R}_0}} + ... + \overrightarrow{p_{S_n/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S_1/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\sigma_{A,S_2/\mathcal{R}_0}} + ... + \overrightarrow{\sigma_{A,S_n/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_A$$

# 3 Torseur Dynamique

### 3.1 Définition du torseur dynamique

Le torseur dynamique du système matériel S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est défini par :

$$\{\mathscr{D}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_0}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M,S/\mathcal{R}_0}}\, dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M,S/\mathcal{R}_0}}\, dm \end{array} \right\}_A$$

$\overrightarrow{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_0}}$ est la résultante dynamique de S par rapport à $\mathcal{R}_0$ (ou quantité d'accélération).
$\overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}}$ est le moment dynamique de S par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Tout comme pour la résultante cinétique on peut montrer que :

$$\overrightarrow{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_0}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

On peut donc écrire le torseur dynamique :

$$\{\mathscr{D}_{S/\mathcal{R}_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_A \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Comme pour tout torseur on peut le déplacer :

- Comme pour les autres torseurs, la résultante dynamique ne dépend pas du point où on écrit le torseur dynamique.
- Le moment dynamique s'obtient ainsi :

$$\overrightarrow{\delta_{B,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

### 3.2 Cas de plusieurs solides :

Soit un système $\Sigma$ de n solides $S_1$, $S_2$, ... $S_3$. Le torseur cinétique de $\Sigma$ est égal à la somme des torseurs cinétiques des n solides, comme toujours, **exprimés au même point**.

$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_0}\}_A = \{\mathscr{D}_{S_1/\mathcal{R}_0}\}_A + \{\mathscr{D}_{S_2/\mathcal{R}_0}\}_A + ... + \{\mathscr{D}_{S_n/\mathcal{R}_0}\}_A$$

$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{\Sigma/\mathcal{R}_0}} = m_1\overrightarrow{\Gamma_{G_1,S_1/\mathcal{R}_0}} + m_2\overrightarrow{\Gamma_{G_2,S_2/\mathcal{R}_0}} + ... + m_n\overrightarrow{\Gamma_{G_n,S_n/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\delta_{A,S_1/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{\delta_{A,S_2/\mathcal{R}_0}} + ... + \overrightarrow{\delta_{A,S_n/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_A$$

## 3.3 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

### 3.3.1 Relation entre la résultante cinétique et la résultante dynamique

La résultante cinétique représente la quantité de mouvement du solide S et vaut :

$$\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_0}} = m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

alors que la résultante dynamique représente la quantité d'accélération de S avec :

$$\overrightarrow{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_0}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

Or l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$ est la dérivée de la vitesse $\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}}$ donc on a logiquement :

$$\overrightarrow{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_0}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_0}}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

### 3.3.2 Relation entre le moment cinétique et moment dynamique

On n'obtient pas le moment dynamique par simple dérivation du moment cinétique, mais on peut montrer que :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_0}}\right]_{\mathcal{R}_0} + \overrightarrow{V_{A,S/\mathcal{R}_0}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

Cas particuliers : ♡♡♡ Dans les cas suivants, le passage du moment cinétique au moment dynamique se limite à la dérivation :

- si on calcule le moment dynamique au centre d'inertie G :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{G,S/\mathcal{R}_\prime}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,S/\mathcal{R}_\prime}}\right]_{\mathcal{R}_\prime}} \quad ♡♡♡$$

- si A est un point fixe dans $\mathcal{R}_0$ :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_\prime}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A,S/\mathcal{R}_\prime}}\right]_{\mathcal{R}_\prime}} \quad ♡♡♡$$

Conséquences :
Le calcul du moment dynamique au centre d'inertie ou en un point fixe de $\mathcal{R}_0$ est souvent assez simple. Ainsi pour déterminer le moment dynamique en un point quelconque $B$, il suffit d'écrire :

$$\overrightarrow{\delta_{B,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

Dans la pratique, A peut être le centre d'une liaison rotule ou pivot entre S et un solide fixe par rapport à $\mathcal{R}_0$.
On utilise aussi le centre d'inertie G.

Et tout ça pour quoi ?... Pour pouvoir écrire le PFD !

# 4 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

## 4.1 Repère Galiléen

### 4.1.1 Définition

Un repère Galiléen $\mathcal{R}_g$ est un repère dans lequel le Principe Fondamental de la Dynamique est vérifié. Pour simplifier, un repère fixe dans l'univers est galiléen.

### 4.1.2 Propriété

Un repère $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ est galiléen.

### 4.1.3 Repères considérés comme galiléens

Il est rarement possible de travailler dans un repère vraiment galiléen. Aussi on se place dans des repères non galiléens. Le PFD n'y est alors pas parfaitement vérifié, mais suivant l'objet d'étude, les éreurs commises sont minimes. Quelques exemples :

- Le repère de Copernic : Centré au centre du soleil avec les axes en direction de trois galaxies lointaines : c'est un repère fortement galiléen (seules les mouvements de la galaxie par rapport aux autres sont négligés) mais peu pratique.
- Le repère de Galilée : même base que le précédent mais centré au centre de la terre. Il est utilisé pour étudier les mouvements des sattélites.
- Le repère du laboratoire : Il s'agit d'un repère fixe par rapport au bâti fixe du système étudié. Bien moins galiléen que les précédents (on néglige la rotation de la terre sur elle même et autour du soleil) il est très pratique et toujours utilisé pour la mécanique générale.
- Parfois on peut se placer dans un repère lié à un système en translation rectiligne uniforme (dans un train, par exemple, afin de simplifier les calculs).
- Attention, ne pas se placer dans un repère lié à une pièce en mouvement quelquonque.

## 4.2 Enoncé du PFD

Soit $\mathcal{R}_0$ un repère galiléen, le torseur dynamique de S par rapport à $\mathcal{R}_0$ exprimé au point A est égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à S lui aussi exprimé au point A :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{ext\to S}\}_A = \{\mathscr{D}_{S/\mathcal{R}_0}\}_A} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Le PFD s'applique aussi bien à un solide qu'à un ensemble de solides : Comme pour le PFS, il faut d'abord décider des solides isolés.

En tant qu'égalité torsorielle, le PFD se décompose en 2 équations vectorielles que l'on peut appliquer séparément :
<u>Théorème de la résultante dynamique</u>

$$\boxed{\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Théorème du moment dynamique

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A,ext \to S}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}}} \qquad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

**Remarques :**

- le PFD englobe le PFS ;
- En dynamique, le théorème des actions réciproques est également vérifié :

$$\{\tau_{S_1 \to S_2}\} = -\{\tau_{S_2 \to S_1}\}$$

## 4.3 Méthode d'application du PFD ♡♡♡

- Réaliser le graphe de structure du mécanisme
- Choisir le système S à isoler.
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à S (BAME)

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{A,ext \to S}} \end{array} \right\}_A$$

- Calcul de la vitesse et de l'accélération de G appartenant à S/R (ou de tous les centres de gravités dans le cas de plusieurs solides).

$$\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}_0}}, \overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

- Calcul du moment cinétique en un point fixe ou en G

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/\mathcal{R}_0}} = \mathscr{I}_{G,S} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}}$$

- Calcul du moment dynamique en un point fixe ou en G

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/\mathcal{R}_0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G,S/\mathcal{R}_0}} \right]_{\mathcal{R}_0}$$

- Calcul du moment dynamique en A

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{\delta_{G,S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}}$$

- Ecrire les équations du PFD nécessaires

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{A,ext \to S}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/\mathcal{R}_0}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/\mathcal{R}_0}} \end{array} \right\}_A$$