

	COURS RESSOURCE ENERGETIQUE	
séquence : B	Comment déterminer le comportement dynamique global d'un système?	

CENTRE D'INTERETS	CI3-2: Performances d'un comportement dynamique
Pré-requis	✓ notion de masse ✓ opérations de base sur les matrices carrées
Savoirs et savoirs-faire associés	S4 Comportement des Systèmes S4123 Approche énergétique : Méthodologie: isolement, bilan des puissances, application du théo- rème de l'énergie cinétique galiléenne et résolution
Compétences principales en SII	B-MODELISER
Compétences visées	B1 Identifier et caractériser les grandeurs physiques agissant sur un système. B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement
	Table des matières 1 Introduction à l'énergétique 2 2 Energie cinétique 6 3 Puissance 9 4 Théorème de l'énergie cinétique TEC (ou théorème de l'énergie puissance) 13 5 Rendement d'un système 14

Etude énergétique d'un système

1 Introduction à l'énergétique

1.1 Energie

L'énergie est une grandeur nécessaire pour réaliser des actions. Elle s'exprime en Joules J .

On rencontre différents types d'énergie :

ENERGIES...



Chimique



Mécanique



Electrique



Calorifique

- Energie électrique : celle contenue dans un condensateur par exemple. Une autre unité est couramment employée pour l'énergie électrique : le Watt heure, $W.h$.

$$1J = 1W.s \text{ donc } 1W.h = 3600J$$

- Energie Chimique : celle contenue dans une batterie ou dans un litre d'essence.
- Energie mécanique : elle peut être accumulée dans un ressort comprimé, sous la forme d'une énergie cinétique (volant d'inertie en rotation, voiture en train de rouler...) ou encore stockée dans une masse mise en hauteur (énergie potentielle de pesanteur : poids d'horloge...).
- Energie calorifique : elle est par exemple contenue dans une pièce chauffée dans un four. Une autre unité pour cette énergie est la calorie cal . ($1cal = 4,184J$)

Beaucoup de systèmes industriels ou de la vie courante convertissent l'énergie.

C'est la **conversion d'énergie** :

- Un chauffe-eau électrique reçoit de l'énergie électrique et la transforme en énergie calorifique alors stockée par l'eau.

- Un moteur électrique convertit l'énergie électrique reçue en énergie mécanique.
- Un moteur thermique tire l'énergie chimique du carburant en la transformant en énergie calorifique (d'où son nom) puis la transforme en énergie mécanique pour faire avancer un véhicule par exemple.

Les systèmes ont souvent besoin de faire transiter une même forme d'énergie, de la transmettre. On parle de **transmission d'énergie**.

La conversion comme la transmission ne sont pas parfaites. Elles se font avec des pertes, des dissipations d'énergie qui partent sous forme de chaleur.

- De l'énergie électrique est par exemple "perdue" dans la résistance des bobinages de moteur.
- De l'énergie mécanique est aussi dérobée aux systèmes par les frottements dans les liaisons.

Ces pertes énergétiques, lorsqu'elles sont prises en compte, font naître la notion de **rendement**.

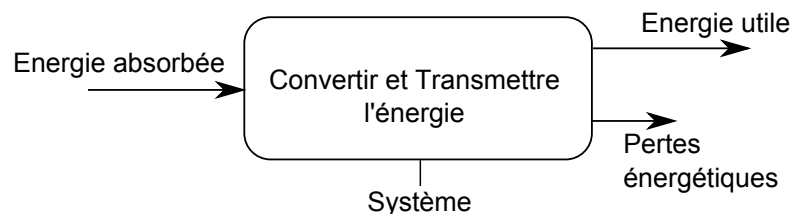
Ce rendement, toujours inférieur à 1 se calcule pour un **cycle complet de fonctionnement**. Il peut s'exprimer comme :

$$\eta = \frac{\text{Energie utile}}{\text{Energie absorbée}}$$



L'énergie se conserve dans le système. Aussi on peut écrire que :

$$\text{Energie absorbée} = \text{Energie utile} + \text{pertes énergétiques}$$



On devra retrouver que :

$$\text{Energie utile} = \eta \cdot \text{Energie absorbée}$$

$$\text{Pertes énergétiques} = (1 - \eta) \text{Energie absorbée}$$

Exemple : pour un moteur électrique de rendement 0,8, qui a absorbé 55,5 Wh électriques :

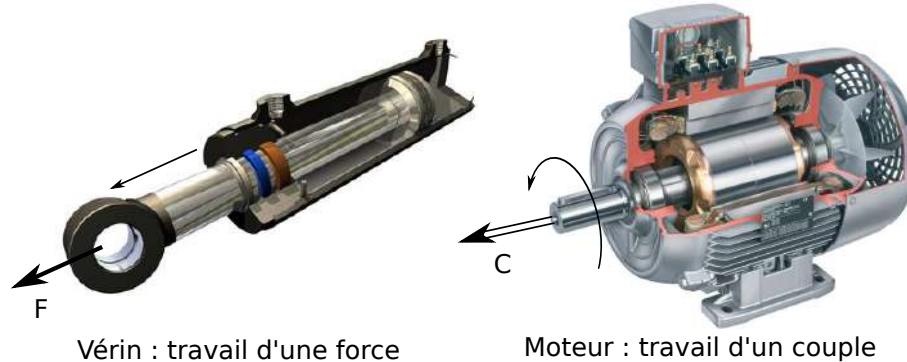
Energie absorbée en kJ :

Energie mécanique fournie :

Energie perdue :

1.2 Travail

La partie utile de l'énergie est, dans les systèmes du laboratoire, mécanique. On parle alors de **travail** ou de travail mécanique.



C'est une énergie, il s'exprime donc en Joules, J. On le note souvent W (Work). Attention W n'est pas en W !

On a besoin pour son calcul du travail élémentaire dW exprimé sur des petits mouvements. Le travail dans le mouvement complet, est obtenu par intégration :

$$W = \int_{mvt} dW$$

Exemples de travaux :

Un couple C qui accompagne un solide S sur une rotation d'angle θ par rapport à un repère $\mathcal{R}$ fournit un travail élémentaire

$$dW = C.d\theta$$

Et si C est **constant**, $\boxed{W(C \rightarrow S/\mathcal{R}) = C.\theta}$ ♡♡

Le résultat est en J si le couple est en N.m et l'angle en rad.

Application : Calculer l'énergie (ou travail) fournie par un moteur qui tourne à $N = 3000tr.min^{-1}$ avec un couple $C_m = 2N.m$ pendant 1 heure. On exprimera le résultat en J puis en W.h.

Une force $\vec{F}$ qui accompagne en A un solide S sur un déplacement $\vec{l}$ par rapport à un repère $\mathcal{R}$ fournit un travail élémentaire :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Et si $\vec{F}$ est **constante**,

$$W(\vec{F} \rightarrow S/\mathcal{R}) = \vec{F} \cdot \vec{l} \quad \heartsuit \heartsuit$$

Application :

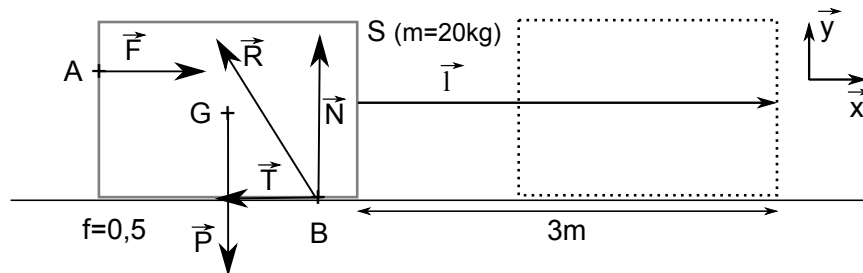


FIGURE 1 – Travail de forces pendant le déplacement d'une caisse.

Dans l'exemple ci-dessus, une caisse de 20 kg est déplacée en ligne droite, à vitesse constante, sur un sol horizontal auquel est associé $\mathcal{R}$, sur une distance de 3 m. Le coefficient de frottement entre le sol et la caisse est de 0,5.

En appliquant le théorème de la résultante dynamique calculer $\vec{N}$, $\vec{T}$ et $\vec{F}$ pendant le déplacement.

En déduire les travaux $W(\vec{P} \rightarrow S/\mathcal{R})$, $W(\vec{N} \rightarrow S/\mathcal{R})$, $W(\vec{T} \rightarrow S/\mathcal{R})$ et $W(\vec{F} \rightarrow S/\mathcal{R})$ au cours du déplacement.

Que représente le signe de $W(\vec{T} \rightarrow S/\mathcal{R})$?

2 Energie cinétique

2.1 Expression de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système matériel S en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est définie par :

$$E_{CS/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \int_S \left(\overrightarrow{V_{P,S/\mathcal{R}}} \right)^2 dm$$

L'unité de l'énergie cinétique est le Joule : $J = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$. Pour calculer l'énergie cinétique de S , on utilise :

$$E_{CS/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{S/\mathcal{R}} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}} \}$$

L'énergie cinétique correspond au demi-comoment des torseurs cinétique et cinématique.

Le comoment de deux torseurs (opérateur noté $\otimes$) est un scalaire :

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{C}_{S/\mathcal{R}} \}_A \otimes \{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}} \} &= \left\{ \begin{matrix} m.\vec{V}(G, 1/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}(A, 1/\mathcal{R}) \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}) \\ \vec{V}(A, 1/\mathcal{R}) \end{matrix} \right\}_A \\ &= m.\vec{V}(G, 1/\mathcal{R}).\vec{V}(A, 1/\mathcal{R}) + \vec{\sigma}(A, 1/\mathcal{R}).\vec{\Omega}(1/\mathcal{R}) \end{aligned}$$

Ou bien en colonne :

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{C}_{S/\mathcal{R}} \}_A \otimes \{ \mathcal{V}_{S/\mathcal{R}} \} &= \begin{pmatrix} m.V_{Gx} & \sigma_x \\ m.V_{Gy} & \sigma_y \\ m.V_{Gz} & \sigma_z \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{pmatrix}_A \\ &= m.V_{Gx}.V_{Ax} + m.V_{Gy}.V_{Ay} + m.V_{Gz}.V_{Az} + \sigma_x.\omega_x + \sigma_y.\omega_y + \sigma_z.\omega_z \end{aligned}$$

NB : Le calcul du comoment se fait avec les deux torseurs écrits au même point A . Par contre on peut choisir A pour simplifier l'écriture des torseurs.

Il est souvent judicieux de calculer l'énergie cinétique en utilisant le centre d'inertie G .

$$E_{CS/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \left[m \overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}}}^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} \cdot \left(\mathcal{I}_{G,S} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} \right) \right]$$

Si on note $\vec{u}$, la direction de $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$:

$$\boxed{E_{CS/\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\overrightarrow{V_{G,S/\mathcal{R}}} \right)^2}_{E_c \text{ translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{(G,\vec{u})} \left(\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} \right)^2}_{E_c \text{ rotation}}} \quad \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

où $I_{(G,\vec{u})}$ est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(G, \vec{u})$.

On retiendra : $\heartsuit \heartsuit \heartsuit$

- Pour un solide en translation quelconque : $E_c = \frac{1}{2} m.V_G^2$
- Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $(A, \vec{z})$: $E_c = \frac{1}{2} I_{A,\vec{z}}.\omega^2$
- Pour un solide en mouvement quelconque, avec sa rotation suivant $\vec{x}$: $E_c = \frac{1}{2} m.V_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,\vec{x}}.\omega^2$

Exemple : Exprimer l'énergie cinétique d'une roue qui roule.

2.2 Notion d'inertie équivalente

Pour un ensemble de solides : L'énergie cinétique est sommative :

$$E_{C\Sigma/R} = \sum (E_{C_{S_i/R}})$$

Moment d'inertie équivalent : Dans le cas d'un système comportant plusieurs pièces en rotation à des vitesses de rotation différentes (et éventuellement certaines en translation), on appelle inertie équivalente ramenée à un axe Δ , l'inertie $J_{eq\Delta}$ que devrait avoir cet axe en rotation pour que l'énergie cinétique totale du système de pièces en rotation soit égale à :

$$\sum (E_{C_{S_i/R}}) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega^2 \quad \heartsuit\heartsuit$$

On peut alors calculer J_{eq} grâce à la formule :

$$J_{eq} = 2 \cdot \frac{\sum (E_{C_{S_i/R}})}{\omega^2}$$

Masse inertielle équivalente : De même, on définit l'inertie globale m_{eq} d'un ensemble de solides en mouvement de translation par rapport à R à la vitesse algébrique V telle que :

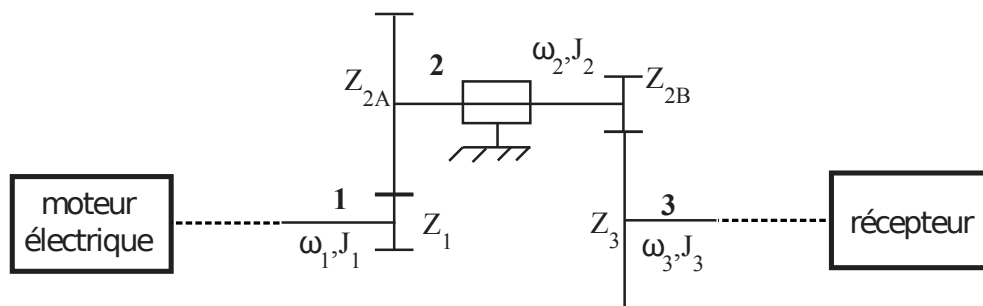
$$\sum (E_{C_{S_i/R}}) = \frac{1}{2} m_{eq} V^2 \quad \heartsuit\heartsuit$$

soit :

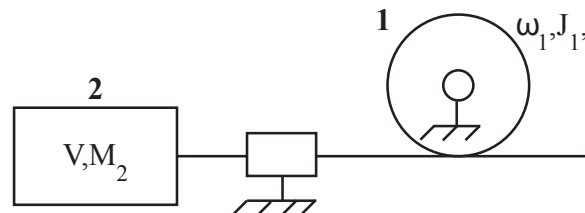
$$m_{eq} = 2 \cdot \frac{\sum (E_{C_{S_i/R}})}{V^2}$$

Intérêt : L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur permet d'estimer rapidement le dimensionnement d'un actionneur(moteur). La masse équivalente permet de faire de même avec des vérins.

Applications : Train d'engrenage. Déterminer le moment d'inertie équivalent du réducteur ramené à l'axe du moteur.



Pignon-crémaillère. Déterminer le moment d'inertie équivalente du système pignon-crémaillère ramené à l'axe du pignon puis la masse inertielle équivalente ramenée à la crémaillère.



3 Puissance

3.1 Généralités

Une notion proche de celle d'énergie est celle de puissance. Il est bon de bien distinguer les deux ainsi que les unités associées. On voit en effet beaucoup d'erreurs dans la presse dite scientifique autour de ces notions.

Contrairement à l'énergie (et donc au travail), la puissance dépend de la notion de temps. Plus un système est capable de fournir le travail rapidement, plus il est puissant.

La puissance instantanée est la dérivée du travail :

$$\mathcal{P}_{\text{instantanée}} \equiv \mathcal{P}(t) = \frac{dW}{dt} \quad \heartsuit$$

Où dW est le travail élémentaire fourni pendant le temps dt .

La puissance moyenne correspond au travail total divisé par le temps pour le réaliser :

$$\mathcal{P}_{\text{moyenne}} \equiv \mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{W}{\Delta t} \quad \heartsuit$$

Il en ressort que l'unité de la puissance, connue comme étant le Watt, W est aussi le $J.s^{-1}$.

Les relations suivantes, directement issues des deux précédentes sont utiles pour calculer un travail ou une énergie :

$$W = \mathcal{P}_{\text{moy}} \cdot \Delta t \quad \heartsuit$$

ou bien :

$$W = \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt \quad \heartsuit$$

On voit alors apparaître l'unité courante de l'énergie électrique : le $W.h$ ou le $kW.h$ car l'énergie est le produit d'une puissance (W , kW) par un temps (h).

Question : A quoi est homogène une production d'éolienne de 1300 kWh/an ?

3.2 Cas particuliers importants

Il est utile de savoir calculer la puissance d'une action mécanique dans les cas simples suivants :

1. Puissance fournie à un solide S par un moteur ou absorbée à S par une génératrice ou un frein : dans ce cas, le travail élémentaire est $dW = C.d\theta$. Il en ressort que

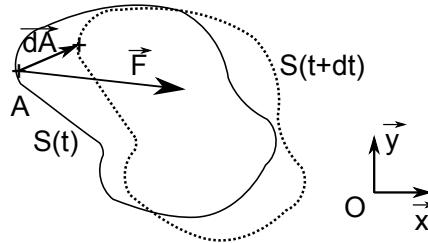
$$\mathcal{P}(C \rightarrow S/\mathcal{R}) = \frac{dW}{dt} = C \cdot \frac{d\theta}{dt} = C \cdot \omega$$

On retient : $\mathcal{P}_{\text{couple}} = C \cdot \omega$ ♡♡♡

Si $\mathcal{P} > 0$ (C et ω de même signe) la puissance est reçue par S (donc bien fournie par le moteur). Si $\mathcal{P} < 0$ (C et ω de signes opposés) alors la puissance est fournie par S (et donc reçue par la génératrice ou le frein).

2. De la même façon, la puissance d'une force qui s'applique à un solide en un point A peut se déduire du travail élémentaire : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{A}$. La puissance instantanée est alors :

$$\mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow S/\mathcal{R}) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}_{A,S/\mathcal{R}}$$



On retient : $\boxed{\mathcal{P}_{force} = \vec{F} \cdot \vec{V}}$ ♡♡♡

NB : Si la force est perpendiculaire à la vitesse, elle ne fournit aucune puissance.
 Si la force est dans le même sens que la vitesse, elle fournit une puissance positive.
 Si la force est opposée à la vitesse, elle fournit une puissance négative.

Exercice : Reprendre l'application de la figure 1 et calculer la puissance instantanée et moyenne de la force F, $\mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow S/\mathcal{R})$ et $\mathcal{P}_{moy}(\vec{F} \rightarrow S/\mathcal{R})$. On supposera que le déplacement s'est fait en 4 secondes.

3.3 Puissance des efforts extérieurs

Soit un solide 2 qui exerce un torseur d'action mécanique $\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}$ sur un solide 1 en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Le puissance des efforts extérieurs à 1, ici exercée par 2, par rapport à $\mathcal{R}$ vaut :

$$\mathcal{P}(2 \rightarrow 1/\mathcal{R}) = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/\mathcal{R})\}$$

On rappelle que le comoment de deux torseurs (opérateur noté $\otimes$) est un scalaire :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}_A \otimes \{\mathcal{V}(1/\mathcal{R})\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}) \\ \vec{V}(A, 1/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A \\ &= \vec{R}(2 \rightarrow 1) \cdot \vec{V}(A, 1/\mathcal{R}) + \vec{M}(A, 2 \rightarrow 1) \cdot \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}) \end{aligned} \quad \heartsuit\heartsuit$$

Ou bien en colonne :

$$\{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\}_A \otimes \{\mathcal{V}(1/\mathcal{R})\} = \begin{pmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} \omega_X & V_X \\ \omega_Y & V_Y \\ \omega_Z & V_Z \end{pmatrix}_A$$

$$= X_{21}.V_X + Y_{21}.V_Y + Z_{21}.V_Z + L_{21}.\omega_X + M_{21}.\omega_Y + N_{21}.\omega_Z \quad \heartsuit\heartsuit$$

Remarques :

1. Le calcul du comoment se fait avec les deux torseurs écrits au même point A .
2. Par contre on peut choisir A pour simplifier l'écriture des torseurs.
3. La puissance obtenue est en W si les torseurs sont exprimés dans les unités S.I. :
 - Forces en N ,
 - Moments en $N.m$,
 - Fréquences de rotations en $rad.s^{-1}$ et
 - vitesses en $m.s^{-1}$.

3.4 Puissance des efforts intérieurs

Soient 1 et 2 deux solides indéformables appartenant au même système Σ , en liaison l'un par rapport à l'autre. On appelle puissance des efforts intérieurs ou puissance des efforts de liaison ou puissance des inter-efforts, la puissance dissipée dans la liaison.

Elle se note et se calcule comme suit :

$$\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) = \{\mathcal{T}(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/2)\} \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Remarques :

1. Il faut bien voir la différence entre la puissance de 2 sur 1, ou 2 est extérieur au système et la puissance des inter-efforts entre 1 et 2. Le torseur cinématique est alors $\{\mathcal{V}(1/2)\}$ et non $\{\mathcal{V}(1/\mathcal{R})\}$.
2. 1 et 2 ont des rôles similaires, on peut donc écrire :

$$\mathcal{P}(2 \leftrightarrow 1) \equiv \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 2) = \{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/1)\}$$

3. Par contre, il ne faut pas écrire $\{\mathcal{T}(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/2)\}$
4. Lorsqu'une liaison est parfaite (sans frottement, sans jeu) alors La puissance des efforts de liaisons est nulle.

Pour s'en convaincre :

 CAMPUS SUD BOURGOGNE	ENERGETIQUE		Cours 3B ₂ 3 TSI
	CI3-2: Performances d'un comportement dynamique		
	CPGE TSI - Lycée H.PARRIAT Montceau-les-Mines	P : V5	

1. Calculer la puissance des efforts intérieurs pour une liaison glissière d'axe $\vec{y}$ parfaite :
2. Même question pour une liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{x})$:

3.5 Liaisons avec frottement

NB : On retiendra absolument que la puissance des efforts intérieurs due aux frottements est toujours négative.

Exemple : Liaison pivot entre 3 et 4 d'axe $(B, \vec{z})$, dont le couple de frottement est $C_f = 0,25 N.m$ suivant $\vec{z}$. Exprimer la puissance des efforts intérieurs échangée dans cette liaison.

4 Théorème de l'énergie cinétique TEC (ou théorème de l'énergie puissance)

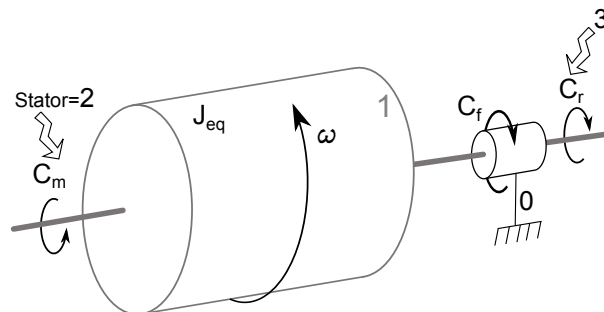
Si Σ est un système composé de plusieurs solides S_i et $\mathcal{R}$ un repère galiléen, alors :

$$\boxed{\frac{dE_c(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} = \sum \mathcal{P}(ext \rightarrow \Sigma, \mathcal{R}) + \sum_{i \neq j} \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j)} \quad \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

On retient : "La dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances extérieures et intérieures au système." $\heartsuit \heartsuit \heartsuit$

Nota Bene

- s'il n'y a qu'un solide S : $\frac{dE_c(S/\mathcal{R})}{dt} = \sum \mathcal{P}(ext \rightarrow S, \mathcal{R})$
- Lorsque les liaisons internes à (Σ) sont **parfaites**, la puissance **intérieure** développée est **nulle**.
- Lorsque les liaisons entre les solides de (Σ) et les solides extérieurs à (Σ) **fixes par rapport à $\mathcal{R}$** sont **parfaites**, la puissance galiléenne **extérieure** développée par les efforts de liaison est **nulle**.
- Le théorème de l'énergie cinétique est souvent utilisé pour dimensionner l'actionneur dans un mécanisme à une mobilité utile.



Exemple fondamental, de base, indispensable!!! : Système à 1 degré de liberté motorisé. Appliquer le TEC à 1 et retrouver l'équation fondamentale de la dynamique sur le moment suivant l'axe de rotation.

5 Rendement d'un système

On a vu en introduction que le rendement d'un système sur un cycle de fonctionnement complet se calcule ainsi.

Sur un cycle complet :

$$\eta = \frac{\text{Energie utile}}{\text{Energie absorbée}} \quad \heartsuit\heartsuit$$

On peut aussi calculer le rendement d'un système lorsque le régime permanent est atteint (Ec constante). Alors, on a :

En régime permanent :

$$\eta = \frac{\text{Puissance utile}}{\text{Puissance absorbée}} \quad \heartsuit\heartsuit$$

remarques :

1. On peut utiliser le rendement d'une transmission de mouvement (réducteur, chaînes...) pour calculer la puissance des inter-efforts qui y est dissipée :

$$\text{Puissance dissipée} = \text{Puissance entrante} \times (1 - \eta)$$

Soit pour l'expression de la puissance intérieure à l'organe de transmission considéré :

$$P_{\text{pertes}} = (\eta - 1)P_E \quad \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

avec P_E la puissance d'entrée (positive). P_{pertes} est toujours négative.

2. Le TEC est un bon outil pour calculer le rendement global d'un système.