Concours Communs Polytechniques 2014
Mathématiques 1 – TSI

Exercice

I. L'application φ, bien définie sur $\mathbb{R}_1[X]$, est :

- bilinéaire :
  Quels que soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)R(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)R(t) + \int_0^1 Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$$
$$\varphi(P, \lambda Q + R) = \int_0^1 P(t)(\lambda Q + R)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)Q(t) + \int_0^1 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$$

- symétrique :
  Quels que soient $P, Q \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q,P)$$

- définie positive :
  Tout d'abord,

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X] \quad \varphi(P,P) = \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale}$$

  De plus,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P) = 0 &\iff \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0\\ &\iff \forall t \in [0,1] \quad P(t) = 0 \quad \text{car } t \mapsto P^2(t) \text{ est continue et positive sur } [0,1]\\ &\iff P = \tilde{0} \quad \text{car } P \text{ admet une infinité de racines}\end{aligned}$$

Ainsi, φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.

II. A. Si l'égalité est vraie pour tout polynôme P, elle l'est en particulier pour $P = 1$ et $P = X$. Réciproquement, si elle l'est pour $P = 1$ et pour $P = X$, en posant $P = aX + b$, on obtient :

$$(aX + b|P_0) = a\,(X|P_0) + b\,(1|P_0) = b = P(0)$$

B. 1. On trouve :

$$(1|P_0) = \int_0^1 (a_0 t + b_0)\,\mathrm{d}t = \left[a_0\frac{t^2}{2} + b_0 t\right]_0^1 = \frac{a_0}{2} + b_0$$
$$(X|P_0) = \int_0^1 (a_0 t^2 + b_0 t)\,\mathrm{d}t = \left[a_0\frac{t^3}{3} + b_0\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a_0}{3} + \frac{b_0}{2}$$

Ainsi, d'après la question précédente, $(P|P_0) = P(0)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si :

$$\begin{cases}\dfrac{a_0}{2} + b_0 = 1\\[2mm] \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{b_0}{2} = 0\end{cases}$$

2. Il n'y a plus qu'à résoudre le système ! On trouve (pivot de Gauss, formule de Cramer, ...) $a_0 = -6$ et $b_0 = 4$, soit $P_0 = -6X + 4$.

III. A. **1.** $\|1\| = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

2. Orthonormalisons la base $(1, X)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt,

- Posons $P_1 = 1$. On a $\|P_1\| = 1$.
- Posons $P_2' = X - \lambda P_1$.

$$\left(P_2'|P_1\right) = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 (t-\lambda)\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Comme $\left\|X - \dfrac{1}{2}\right\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $P_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$ convient.

La famille (P_1, P_2) ainsi construite est orthonormale.

3. ⋆ Montrons pour commencer que les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ sont bien de norme 1.

$$\begin{aligned}\|\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2\|^2 &= \|\cos(\theta)P_1\|^2 + \|\sin(\theta)P_2\|^2 \quad \text{(Pythagore)}\\ &= \cos^2(\theta)\,\|P_1\|^2 + \sin^2(\theta)\,\|P_2\|^2\\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\end{aligned}$$

⋆ Réciproquement, si $P = aP_1 + bP_2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on suppose de norme 1, alors :

$$\|P\|^2 = a^2\,\|P_1\|^2 + b^2\,\|P_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1$$

Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

4. Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$ alors,

$$P(0) = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

5. La valeur maximale vaut donc 2 et elle est atteinte pour $\theta = -\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

B. **1.** Quels que soient les polynômes P et Q, $|(P|Q)| \leqslant \|P\| \cdot \|Q\|$
Il y a égalité lorsque les polynômes P et Q sont proportionnels (les deux vecteurs sont alors colinéaires).

2. Appliquée à $P \in \mathrm{S}$ et P_0, l'inégalité devient :

$$|(P|P_0)| = |P(0)| \leqslant \|P\| \cdot \|P_0\| = \|P_0\|$$

En particulier, $P(0) \leqslant \|P_0\|$.

3. Il suffit de prendre un polynôme proportionnel à P_0 et de norme 1, avec, par exemple, $P = \dfrac{P_0}{\|P_0\|}$.

4. $\|P_0\| = \|-6X + 4\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 (-6t+4)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{4} = 2$.
On retrouve bien le résultat précédent.

Problème

I. A. 1. On trouve $\alpha(a) = (-10, -1)$. Comme les deux vecteurs a et $\alpha(a)$ ne sont pas colinéaires, la famille est libre et constitue bien une base de $\mathbb{R}^2$. L'endomorphisme α est donc cyclique.

2. $\alpha^2(a) = (-34, -9)$ donc $xa + y\alpha(a) = \alpha^2(a)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x - 10y = -34 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$$

On obtient $x = -2$ et $y = 3$.

3. D'après la question précédente, $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \alpha(a) & \alpha^2(a) \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ \alpha(a) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = A'$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$.
2 est donc bien valeur propre de α.

5. Si b est un vecteur propre de α associé à la valeur propre 2, $(b, \alpha(b)) = (b, 2b)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ puisque la famille n'est pas libre. Un calcul élémentaire nous permet de prendre, par exemple, $b = (3, 1)$.

B. 1. Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = (2 - X) \cdot \chi_A = -(X-1)(X-2)^2$.

2. 0 n'étant pas valeur propre de B, la matrice B est inversible ce qui fait de β un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Un calcul classique conduit à :

$$E_1 = \text{Ker}\,(\beta - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}((0,2,1))$$
$$E_2 = \text{Ker}\,(\beta - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}((1,0,0),(0,3,1))$$

Le polynôme caractéristique de β étant scindé sur $\mathbb{R}$ et les dimensions des sous-espaces propres étant égales à l'ordre de multiplicité des valeurs propres, l'endomorphisme β est diagonalisable.
De plus, dans la base $((1,0,0),(0,3,1),(0,2,1))$, l'endomorphisme β a pour matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Comme $D^2 - 3D + 2I_3 = 0$, on a bien $\beta^2 - 3\beta + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} = 0$.

5. Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^3$, $\beta^2(a) = 3\beta(a) - 2a$. La famille $(a, \beta(a), \beta^2(a))$ ne peut donc être libre, et ceci, quel que soit a. L'endomorphisme β n'est donc pas cyclique.

C. 1. $\gamma(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
Montrons par récurrence sur k que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)\cdots(n-k)X^{n-k-1}$$

- Initialisation : la propriété est bien vérifiée pour $k = 1$.
- Hérédité :
On suppose la propriété vraie pour un k donné. Montrons qu'elle l'est encore au rang $k+1$. Comme $\gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)\cdots(n-k)X^{n-k-1}$, on a :

$$\gamma^{k+1}(X^{n-1}) = (n-1)\cdots(n-k)(n-k-1)X^{n-k-2} = (n-1)\cdots(n-(k+1))X^{n-(k+1)-1}$$

Ceci achève la démonstration par récurrence.

2. Les polynômes $X^{n-1},\gamma(X^{n-1}),\cdots,\gamma^{n-1}(X^{n-1})$ sont non nuls et de degrés étagés. Ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme cette famille comporte $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])=n$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Tout ceci montre que l'endomorphisme γ est cyclique.

II. A. 1. Pour $k\geqslant 1$, $\delta(X^k)=(X+1)^k-X^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i-X^k=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$. $\delta(X^k)$ est donc bien un polynôme de degré $k-1$ de coefficient dominant $\binom{k}{k-1}=k\neq 0$.

2. Soit P un polynôme de degré $p\geqslant 1$. Posons alors $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ (où $a_p\neq 0$).

$$\delta(P)=\delta\left(\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{p}a_k\delta(X^k)$$

Les polynômes $\delta(X^k)$ pour $k\geqslant 1$ étant de degré $k-1$, $\delta(P)$ a même degré que $\delta(X^p)$, c'est-à-dire $p-1$.

3. Les polynômes $X^{n-1},\delta(X^{n-1}),\cdots,\delta^{n-1}(X^{n-1})$ sont non nuls et de degrés étagés. Ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme cette famille comporte $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])=n$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Tout ceci montre que l'endomorphisme δ est cyclique.

B. 1. Les polynômes $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ sont non nuls et de degrés étagés. Ils forment là-encore une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.Cette famille comportant n vecteurs, c'est bien une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Tout d'abord,

$$P_0=1;\quad P_1=X;\quad P_2=\frac{X(X-1)}{2};\quad P_3=\frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

Déterminons quatre réels a,b,c et d tels que :

$$P=X^3-5X^2+X-3=aP_0+bP_1+cP_2+dP_3$$

En évaluant cette égalité successivement en 0, 1, 2 et 3, on trouve le système :

$$\begin{cases} -3=a\\ -6=a+b\\ -13=a+2b+c\\ -18=a+3b+3c+d\end{cases}$$

que l'on résout facilement et nous permet d'obtenir $a=-3$, $b=-3$, $c=-4$ et enfin $d=6$.

3. $\delta(P_j)=P_j(X+1)-P_j(X)$ ce qui permet d'écrire pour $j\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\delta(P_j)&=\frac{1}{j!}[(X+1)X(X-1)\cdots(X-j+2)-X(X-1)(X-2)\cdots(X-j+1)]\\ &=\frac{X(X-1)\cdots(X-j+2)}{j!}[(X+1)-(X-j+1)]\\ &=\frac{X(X-1)\cdots(X-j+2)}{(j-1)!}=P_{j-1}\end{aligned}$$

Ceci montre que $\delta^i(P_j)=P_{j-i}$ pour $i\leqslant j$ alors que $\delta^i(P_j)=0$ pour $i>j$.

4. La famille $(P_{n-1},\delta(P_{n-1}),\cdots,\delta^{n-1}(P_{n-1}))=(P_{n-1},P_{n-2},\cdots,P_0)$ étant une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on retrouve bien le fait que l'endomorphisme δ est cyclique.

FIN DE L'ÉPREUVE