

Problème 1

Partie I — Étude des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2

I.1 — Exemple simple

Q1. La variable $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p , ssi $V(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P[V=1] = p$. Bien entendu, cela entraîne : $P[V=0] = 1-p$, ce dernier paramètre étant souvent noté q .

Q2. Les variables V et V^2 ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (on parle de variable aléatoire finie), elles admettent des espérances $E[V]$, et $E[V^2]$ (cours de première année) qui ne sont que des sommes finies. Leur existence ne fait donc pas problème. La question n'est pas posée, mais ces espérances sont faciles à calculer : $E[V] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ et $E[V^2] = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$ également (on a en réalité : $V = V^2$).

I.2 — Cadre général

Remarque générale : d'après le cours sur les couples de variables aléatoires, la famille $(r_{i,j})$ détermine la loi du couple (X, Y) , tandis que les familles (p_i) , et (q_j) , les lois marginales.

Q3. L'égalité $r_{i,j} = p_i \times q_j$ s'écrit $P[X=x_i, Y=y_j] = P[X=x_i] \times P[Y=y_j]$. D'après le cours sur les couples de variables aléatoires, on sait que X, Y sont indépendantes ssi, par définition :

$$r_{i,j} = p_i \times q_j \text{ pour tout couple } (i, j).$$

Q4. D'après la formule de transfert : $E[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i) P[X=x_i]$ lorsque cette série converge absolument. C'est le cas si l'on prend $f(t) = t^2$ (puisque $X \in \mathcal{V}_d^2$). On obtient :

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 P[X=x_i]. \quad \text{De même : } E[Y^2] = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j^2 P[Y=y_j].$$

Q5. Utilisons le système complet d'événements associé à la variable Y : pour tout événement A l'on a

$$P[A] = \sum_{j=0}^{+\infty} P[A \cap (Y=y_j)], \text{ et en particulier :}$$

$$P[X=x_i] = \sum_{j=0}^{+\infty} P[(X=x_i) \cap (Y=y_j)] \quad \text{soit :} \quad p_i = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}.$$

Remplaçons donc $P[X=x_i] = p_i$ par la somme $\sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}$ dans la formule de la question (Q4), et il vient :

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 P[X=x_i] = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i^2 \sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}) = \sum_{i=0}^{+\infty} (\sum_{j=0}^{+\infty} x_i^2 r_{i,j})$$

On a de même $P[Y=y_j] = \sum_{i=0}^{+\infty} P[(Y=y_j) \cap (X=x_i)]$ d'où $q_j = \sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}$ et alors :

$$E[Y^2] = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j^2 P[Y=y_j] = \sum_{j=0}^{+\infty} (y_j^2 \sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\sum_{i=0}^{+\infty} y_j^2 r_{i,j})$$

Q6. Posons $a = |x|$ et $b = |y|$, on a trivialement $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Remplaçons :

$$\text{il vient } |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \geq 0, \text{ et donc } |xy| = |x||y| \leq \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Q7. Considérons les variables aléatoires $T = XY$ et $Z = \frac{X^2 + Y^2}{2}$. Les variables X, Y étant supposées appartenir à $\mathcal{V}_d^2$ (voir le début de la partie I.2), les variables X^2 et Y^2 sont d'espérances finies.

Or, la variable $Z = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2$ est une combinaison linéaire X^2 et Y^2 , elle est donc d'espérance finie, avec $E[Z] = \frac{1}{2}E[X^2] + \frac{1}{2}E[Y^2] = \frac{1}{2}(E[X^2] + E[Y^2])$. C'est la linéarité de l'espérance. Par ailleurs, on a $|T| \leq Z$. Donc on peut appliquer à T le résultat admis. On obtient : l'espérance de $T = XY$ existe, et :

$$E[T] \leq E[Z] = \frac{1}{2}(E[X^2] + E[Y^2])$$

Q8. Soit donc X, Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{V}_d^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question (Q6) : $(X + \lambda Y)^2 = X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2X\lambda Y \leq X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2|\lambda| |XY|$

$$\begin{aligned} &\leq X^2 + \lambda^2 Y^2 + 2|\lambda| \frac{X^2 + Y^2}{2} = X^2 + \lambda^2 Y^2 + |\lambda|(X^2 + Y^2) \\ &\leq (1 + |\lambda|)X^2 + (\lambda^2 + |\lambda|)Y^2 \end{aligned}$$

Posons $T = (X + \lambda Y)^2$ et $Z = (1 + |\lambda|)X^2 + (\lambda^2 + |\lambda|)Y^2$: on a $0 \leq T \leq Z$ et Z est d'espérance finie. Il suffit alors d'appliquer de nouveau le résultat admis à la question précédente. On obtient :

$$\forall X, Y \in \mathcal{V}_d^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad X + \lambda Y \in \mathcal{V}_d^2$$

On a montré que $\mathcal{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des variables aléatoires réelles.

I.3— Artifice de calcul : utilisation de la loi certaine

Q9. L'ensemble image de Z est $Z(\Omega) = \{1\}$. La loi de Z est définie par : $P[Z=1] = 1$.

Q10. On a alors, par la formule de transfert pour une variable finie :

$$E[Z^2] = \sum_{i=1}^1 1^2 \cdot P[Z=1] = 1^2 \cdot P[Z=1] = 1$$

On a bien $Z \in \mathcal{V}_d^2$. Notons que c'est aussi le cas de toute variable finie.

Q11. Posons $Y_1 = Z$, le résultat de la question (Q7) est : XY_1 est d'espérance finie, et

$$E[XY_1] \leq \frac{1}{2}(E[X^2] + E[Y_1^2]).$$

Or la fonction $Y_1 = Z$ est la constante 1, et on a vu à la question (Q10) : $E[Z^2] = 1$. On a obtenu que X est d'espérance finie, et que l'on a :

$$E[X] \leq \frac{1}{2}(E[X^2] + 1)$$

Q12. Dans le cas de variables aléatoires finies, on a :

$$(X - E[X])(Y - E[Y]) = XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]$$

Alors : $E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]]$, et par linéarité :

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])(Y - E[Y])] &= E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y]E[1] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \quad \text{car } E[1] = 1 \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Q13. Soit X, Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{V}_d^2$, la question Q7 donne que XY est d'espérance finie, et la question (Q11) donne que X , et aussi Y , sont d'espérances finies. Alors leur covariance existe.

Partie II — Étude de la matrice de covariance

II.1 — Étude d'un exemple

Q14. Soit la formule des probabilités totales, pour le système complet d'événements $(V_3=0), (V_3=1)$:

$$P[(V_1=i) \cap (V_2=j)] = P[(V_1=i) \cap (V_2=j) \cap (V_3=0)] + P[(V_1=i) \cap (V_2=j) \cap (V_3=1)]$$

On en déduit la loi du couple (V_1, V_2) :

$$P[(V_1=0) \cap (V_2=0)] = 0 + 0 = 0, \quad P[(V_1=0) \cap (V_2=1)] = 0 + p_1 = p_1$$

$$P[(V_1=1) \cap (V_2=0)] = 0 + p_2 = p_2, \quad P[(V_1=1) \cap (V_2=1)] = p_3 + 0 = p_3$$

— Calculons la loi de V_1 : $P[(V_1=i)] = P[(V_1=i) \cap (V_2=0)] + P[(V_1=i) \cap (V_2=1)]$, d'où :

$$P[(V_1=0)] = 0 + p_1 = p_1, \quad P[(V_1=1)] = p_2 + p_3 = 1 - p_1$$

La variable V_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p_1$.

— Puis la loi de V_2 : $P[(V_2=j)] = P[(V_1=0) \cap (V_2=j)] + P[(V_1=1) \cap (V_2=j)]$, d'où

$$P[(V_2=0)] = 0 + p_2 = p_2, \quad P[(V_2=1)] = p_1 + p_3 = 1 - p_2$$

La variable V_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p_2$.

— Pour la loi de V_3 : $P[(V_3=k)] = P[(V_1=0) \cap (V_2=0) \cap (V_3=k)] + P[(V_1=0) \cap (V_2=1) \cap (V_3=k)]$
 $+ P[(V_1=1) \cap (V_2=0) \cap (V_3=k)] + P[(V_1=1) \cap (V_2=1) \cap (V_3=k)]$

D'où $P[(V_3=0)] = 0 + 0 + 0 + p_3 = p_3$ et $P[(V_3=1)] = 0 + p_1 + p_2 + 0 = 1 - p_3$

La variable V_3 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p_3$.

Q15. Posons $S = V_1 + V_2 + V_3$. Calculons la probabilité demandée :

$$P[S=2] = P[(V_1=1) \cap (V_2=1) \cap (V_3=0)] + P[(V_1=1) \cap (V_2=0) \cap (V_3=1)] + P[(V_1=0) \cap (V_2=1) \cap (V_3=1)]$$

$$= p_3 + p_2 + p_1 = 1.$$

Calcul de la variance

On en déduit : $P[S=0] = 0$, $P[S=1] = 0$, $P[S=3] = 0$.

On a $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ donc pour toute fonction f , par la formule de transfert :

$$E[f(S)] = f(0)P[S=0] + f(1)P[S=1] + f(2)P[S=2] + f(3)P[S=3]$$

$$= f(2)P[S=2]$$

En particulier $E[S] = 2$ et $E[S^2] = 4$, d'où $\text{var}[S] = 0$.

Q16. Admettons que $\text{var}[V_1] = (1 - p_1)p_1$ (c'est du cours). De même que $E[V_1] = p_1$ et $E[V_2] = p_2$.

Calculons la covariance du couple (V_1, V_2) : $\text{cov}[V_1, V_2] = E[V_1 V_2] - E[V_1]E[V_2]$. Utilisons la formule

de transfert : $E[V_1 V_2] = E[f(V_1, V_2)]$ pour $f(x, y) = xy$ et donc :

$$E[V_1 V_2] = \sum_{i,j} f(i, j) P[(V_1=i) \cap (V_2=j)] = \sum_{i,j} ij P[(V_1=i) \cap (V_2=j)]$$

$$= 0P[(V_1=0) \cap (V_2=0)] + 0P[(V_1=0) \cap (V_2=1)] + 0P[(V_1=1) \cap (V_2=0)] + 1P[(V_1=1) \cap (V_2=1)]$$

$$= 0 + 0 + 0 + p_3 = p_3$$

Alors : $\text{cov}(V_1, V_2) = p_3 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_3 - 1 + p_1 + p_2 - p_1 p_2 = -p_1 p_2$ (*)

Q17. De même qu'à la question précédente, on aura :

$$\text{var}[V_2] = (1 - p_2)p_2, \quad \text{var}[V_3] = (1 - p_3)p_3, \quad \text{et aussi } \text{cov}(V_1, V_3) = -p_1 p_3, \quad \text{cov}(V_2, V_3) = -p_2 p_3 \quad (**)$$

Enfin d'après la définition (1) de la covariance, on a $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$. On en déduit que la matrice K est symétrique : cette matrice est donc complètement précisée.

Réduction de la matrice K dans un cas particulier

Q18. Notons U ce vecteur colonne, il vient :

$$KU = \begin{cases} p_1(1-p_1) - p_1p_2 - p_1p_3 = p_1 - p_1(p_1+p_2+p_3) = 0 \\ p_2(1-p_2) - p_1p_2 - p_2p_3 = p_2 - p_2(p_1+p_2+p_3) = 0 \\ p_3(1-p_3) - p_1p_3 - p_2p_3 = p_3 - p_3(p_1+p_2+p_3) = 0 \end{cases}$$

Donc U est un vecteur propre, associé à la valeur propre 0.

Q19. D'après la question précédente, $\dim \ker K = 1$ ou 2. Alors le rang de K vaut 2 ou 1. Si le rang était 1, les colonnes seraient proportionnelles. On aurait en particulier, en l'écrivant pour les deux premières colonnes : $\begin{vmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) \end{vmatrix} = 0$. Or ce déterminant vaut :

$$p_1p_2(1-p_1)(1-p_2) - p_1^2p_2^2 = p_1p_2[1-p_1-p_2] = p_1p_2p_3 \neq 0$$

C'est donc que le rang de K vaut 2. On en déduit que $\dim \ker K = 1$, d'où $\ker K = \text{vect}(U)$.

Q20. Écrivons la matrice K dans la cas particulier où $p_2 = p_3 = p$:

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p & -p_1p \\ -p_1p & p(1-p) & -p^2 \\ -p_1p & -p^2 & p(1-p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p-4p^2 & 2p^2-p & 2p^2-p \\ 2p^2-p & p-p^2 & -p^2 \\ 2p^2-p & -p^2 & p-p^2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 2-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & 1-p & -p \\ 2p-1 & -p & 1-p \end{pmatrix}$$

Considérons le vecteur $V = [0, 1, -1]^T$:

$$KV = \begin{cases} -p_1p + p_1p = 0 \\ p(1-p) + p^2 = p \\ -p^2 - p(1-p) = -p \end{cases} \quad \text{et donc} \quad KV = pV$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre p est le noyau de la matrice :

$$K - pI = p \begin{pmatrix} 1-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & -p & -p \\ 2p-1 & -p & -p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 2p_1-1 & 2p-1 & 2p-1 \\ -p_1 & -p & -p \\ -p_1 & -p & -p \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice vaut 2 pour $p_1 \neq p$, et vaut 1 si $p_1 = p$ (i.e. $p = p_1 = 1/3$).

Q21. La trace de K est égale à $\text{Tr } K = 4p - 6p^2$. C'est la somme des trois valeurs propres réelles de K , comptées avec leurs multiplicités. Nous connaissons les valeurs propres 0, p donc il reste une valeur propre inconnue, que nous noterons λ :

$$\lambda = 3p - 6p^2 = 3pp_1, \quad \text{on a donc} \quad \chi_K(X) = X(X-p)(X-3pp_1).$$

II.2 — Retour au cas général

Q22. Nous avons déjà justifié que la matrice K est symétrique, et notre argument était général. Par ailleurs elle est aussi réelle, donc elle est diagonalisable.

Q23. On sait développer la variance d'une somme :

$$\text{var}(x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3) = \text{cov}(x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3, x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j)$$

Et puisqu'une variance est toujours positive, il vient :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{on a} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j) \geq 0$$

Q24. Pour tout vecteur $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, on a donc : $X^T K X \geq 0$. En particulier, si $KX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ (vecteur propre), on a : $\langle X | KX \rangle = X^T K X \geq 0$. Or, $\langle X | KX \rangle = \langle X | \lambda X \rangle = \lambda \|X\|^2 \geq 0$. Puisque $X \neq 0$, il vient : $\lambda \geq 0$.

Problème 2

Partie I – Résolution dans le cas $\mu = 0$

Q25. $f: x \mapsto \arcsin(2x-1)$ est définie au point x , ssi $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, et l'on obtient : $0 \leq x \leq 1$. Posons $\varphi: x \mapsto 2x-1$, la fonction φ est continue sur $I = [0, 1]$, on a $\varphi(I) = [-1, 1]$, et enfin $\arcsin$ est continue sur $J = \varphi(I)$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est continue sur $I = [0, 1]$.

De même, φ est dérivable sur $\tilde{I} =]0, 1[$, on a $\varphi(\tilde{I}) =]-1, 1[$, et enfin $\arcsin$ est dérivable sur $\tilde{J} = \varphi(\tilde{I})$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est dérivable sur $\tilde{I} =]0, 1[$, et se dérive avec la formule :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) &= \arcsin'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

Q26. Si une fonction y est constante sur $]0, 1[$, alors on a $y'(x) = y''(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$, et donc l'égalité $16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' = 0$ est vérifiée. La fonction y est une solution de (E_0) sur $]0, 1[$.

Q27. Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \frac{16x-8}{16x(x-1)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}$$

Q28. L'équation (E_0) peut, sur l'intervalle $]0, 1[$, s'écrire sous forme résolue :

$$y'' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} y' = 0.$$

L'équation (E_0) est donc également équivalente à :

$$z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

En utilisant la question précédente, on obtient la forme attendue :

$$(E^*) : z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right) z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

Q29. L'équation (E^*) est linéaire scalaire homogène du premier ordre. Posons $a(x) = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$, une primitive sur $]0, 1[$ est $A(x) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln |x-1| = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1-x)$. Alors les solutions de (E^*) sur $]0, 1[$ sont les fonctions : $\varphi_A : x \mapsto C e^{-A(x)} = A x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour un $A \in \mathbb{R}$.

Q30. D'après la question (Q28), les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonction y vérifiant :

$$z = y' \text{ est solutions de } (E^*) \text{ sur }]0, 1[$$

Ce sont les fonction y telles que :

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} = A f'(x)$$

On conclut facilement : les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonctions :

$$f_{A,B} : x \mapsto A f(x) + B = A \arcsin(2x-1) + B \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Partie II – Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu = 0$

Q31. Rappelons le cours sur les séries entières :

(C) La somme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence, ici $] -R, R[$. De plus, la fonction dérivée s'obtient en dérivant terme à terme : $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et cette série entière a également R pour rayon de convergence.

Montrons par récurrence que y est de classe C^∞ , c'est-à-dire indéfiniment dérivable, sur $] -R, R[$: nous montrons, de façon précise : $[\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)]$

où $\mathcal{P}(k)$ est la propriété : « la dérivée k -ième $y^{(k)}(x)$ existe sur $] -R, R[$ et est somme d'une série entière $y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et dont le rayon de convergence est R ».

— Notre rappel de cours initialise cette récurrence.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons : « $y^{(k)}(x)$ existe sur $] -R, R[$ et soit somme d'une série entière $y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, le rayon de convergence de cette série étant exactement R ».

Appliquons le théorème (C) : la fonction $y^{(k)}$ étant la somme d'une série entière elle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$, sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, et est donc somme de la série entière dérivée qui est aussi de rayon R .

Cette fonction dérivée est $y^{(k+1)}$: nous avons montré la propriété au rang $k+1$.

Q32. Soit une fonction $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, somme d'une série entière de rayon R . En appliquant (Q31) :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad x y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

À l'aide ces expressions, nous allons pouvoir exprimer le premier membre de l'équation (E_μ) comme la somme d'une série entière :

$$\begin{aligned} 16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' - \mu y &= 16x^2 y'' - 16x y'' + 16x y' - 8y' - \mu y \\ &= 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + 16 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 8 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [16n(n-1) a_n - 16(n+1)n a_{n+1} + 16n a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu a_n] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}] x^n \end{aligned}$$

La fonction y est donc solution de (E_μ) , ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}] x^n = 0$.

Q33. Par unicité des coefficients d'une série entière, si y est solution de (E_μ) , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (16n^2 - \mu) a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} = 0$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2 - \mu)}{8(n+1)(2n+1)} a_n = \frac{(16n^2 - \mu)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n \quad (*)$$

On en déduit :

$$a_{n+1} = a_0 \prod_{k=0}^n \frac{(16k^2 - \mu)}{4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu)}{\prod_{k=0}^n 4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^n (16k^2 - \mu)}{4^{n+1}(2n+2)!}$$

Ou encore, par simple décalage d'indice :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n(2n)!} \quad (**)$$

Q34. Si $a_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. La fonction y est la fonction nulle, somme de la série entière nulle de rayon de convergence $+\infty$.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ pour un entier p , on a $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

Au rang $n = p$, la formule (*) donne $a_p = 0$ d'abord, et ensuite : $\forall n \geq p, a_n = 0$. Dans ce cas, toute solution développable en série entière est un polynôme de degré $p-1$, et ces solutions forment une droite.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et μ n'est pas de la forme $\mu = 16p^2$, alors $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout n .

Cherchons le rayon de convergence de cette série entière, et pour cela posons $u_n = a_n x^n$.

D'après (*) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$, et donc en utilisant le théorème de D'Alembert :

- Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument,
- Si $|x| > 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On en déduit : $R = 1$.

Partie III – Étude d'une solution particulière

Dans cette partie, on a $a_0 = 1$, $\mu = 1$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2 - 1)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n \quad (*) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1)}{4^n(2n)!} \quad (**)$$

Q37. En reprenant (**), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 1)}{4^n(2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!} \quad (***)$$

Q38. Notons P_n le produit des entiers pairs, I_n le produit des entiers impairs, compris entre 1 et $4n$, de façon que $(4n)! = P_n I_n$. Pour le produit des pairs, on a $P_n = 2 \dots (4n) = 2^{2n} 1 \dots (2n) = 2^{2n}(2n)!$.

Considérons ensuite le produit :

$$Q_n = (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-5) \cdot (4n-3) \times (4n-1) = -I_n$$

On a donc :

$$(4n)! = P_n I_n = 2^{2n}(2n)! \cdot (-Q_n) = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$$

Q39. Poursuivons le calcul de la question précédente : $(4n)! = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$

donne $\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}$. En remplaçant dans l'expression (***) de a_n :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)} \frac{1}{4^n(2n)!} = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)}$$

Q40. À l'aide de la formule de Stirling : $(4n)! \sim e^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi 4n} = e^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}$, puis $(2n)! \sim e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}$, $(2n)!^2 \sim e^{-4n}(2n)^{4n}2\pi 2n = e^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n$ (on a bien $2^{4n} = 4^{2n}$).

Alors :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)} \sim \frac{-e^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}}{4^{2n}e^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n 4n} = \frac{-\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}n^2} = \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$$

Q41. Nous avons trouvé pour rayon de convergence $R = 1$ (question Q36).

Étudions la convergence des séries numériques $\sum a_n 1^n = \sum a_n$ et $\sum a_n (-1)^n$: la série $\sum a_n$ converge, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Nos deux séries numériques convergent absolument.

Q42. La fonction φ , somme de la série entière $\sum a_n x^n$ étudié ci-dessus, est donc une fonction dérivable sur $] -1, 1[$. La série entière $\sum a_n x^n$ vérifie la condition de la question (Q32) pour $\mu = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}] x^n = 0.$$

Alors, d'après le résultat de cette question, la fonction somme φ est solution de (E_1) sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Pour conclure, il reste à justifier la solution φ n'est pas la fonction nulle. Or, $\varphi(0) = a_0 = 1$ est non nul.