Séries de Fourier

Série de Fourier

Pour des fonctions périodiques et continues par morceaux sur R

1) Représentation graphique
2) Choix de l'intervalle d'intégration en fonction de la définition de la fonction.
3) Calcul des coefficients :

cas général

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \\ b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

paire

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \\ b_n(f) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

Impaire

$$\begin{cases} a_0(f) = 0 \\ a_n(f) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \\ b_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

Théorèmes de convergence

Théorème de Parseval (fonctions périodiques et continues par morceaux sur R)

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} \left(f(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \left(a_0(f)\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(a_n(f)\right)^2 + \left(b_n(f)\right)^2\right)$$

Théorème de Dirichlet « faible »
(fonctions périodiques et de classe C^1 par morceaux sur R)

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\right) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

Théorème deDirichlet « fort »
(fonctions périodiques, continues et de classe C^1 par morceaux sur R)

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\right) = f(t)$$

Utilisation

Calcul des sommes de séries numériques :

- Avec le théorème de Parseval si la puissance du terme général est le double de la puissance des coefficients de Fourier
- Avec l'un des théorèmes de Dirichlet si ces deux puissances sont égales, en choisissant une valeur « simple » (0,1,π, …)de la variable

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$