CORRIGE CB n°1 (CCINP)

PROBLEME 1

Mise en place du problème

1. A l'instant 0 on sait que les deux ampoules sont allumées donc $P(X_0 = 2) = 1$ et $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 0) = 0$. Dit autrement, X_0 est la loi certaine égale à 2 donc $E(X_0) = 2$ et $V(X_0) = 0$.
2. On sait que $X_n = 2$ donc qu'à l'instant n, les deux ampoules sont allumées. Chacune de ces ampoules a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de s'éteindre à l'instant $n+1$ donc les ampoules étant indépendantes, on a une probabilité égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ que ces deux ampoules restent allumées, donc $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$.
   Dire que $X_{n+1} = 1$ signifie que l'une de ces deux ampoules a grillé à l'instant $n+1$: c'est soit la première (et alors la deuxième reste allumée), avec une probabilité de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, soit la deuxième (et alors la première reste allumée), avec une probabilité de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.
   Finalement, on a bien $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
3. $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$
   $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = 0, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$
   $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0, P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0, P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1.$
4. Soit $n \geq 0$. Les évènements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ constituent une partition de l'univers Ω. On utilise donc la formule des probabilités totales :
   $P(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 2)$
   Donc $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)$.
   On montre de même que $P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2)$ et que $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}P(X_n = 2)$.
   On a donc bien $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n

1. Calcul de l'espérance :
   a. Soit $n \in \mathbb{N}$: On a $E(X_n) = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2)$ et
   $L_1 U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2)$.
   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = L_1 U_n$.
   b. $L_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}L_1$.
   D'après ce qui précède,on a
   $E(X_{n+1}) = L_1 U_{n+1} = L_1 (AU_n) = (L_1 A) U_n = \frac{1}{2}L_1 U_n = \frac{1}{2}E(X_n)$.
   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n)$.

c. La suite de terme général $E(X_n)$ est donc une suite géométrique de raison 2 et on a donc, pour tout entier n, $E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n E(X_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

2. Calcul du moment d'ordre 2

a. On applique la formule du transfert à la variable aléatoire X_n avec $f(x) = x^2$: on a donc $E\left(X_n^2\right) = 0^2 P(X_n = 0) + 1^2 P(X_n = 1) + 2^2 P(X_n = 2) = L_2 U_n$.

b. $L_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

On cherche deux réels α et β tels que $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

α et β sont donc solution du système $\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & 1/2 \\ 2\alpha + 4\beta & = & 3/2 \end{array} \right.$

On montre facilement en résolvant ce système que $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

$$L_2 A = \frac{1}{4} L_1 + \frac{1}{4} L_2.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$: on a $E\left(X_{n+1}^2\right) = L_2 U_{n+1} = L_2 (A U_n) = (L_2 A) U_n = \left(\frac{1}{4} L_1 + \frac{1}{4} L_2\right) U_n$
$= \frac{1}{4} L_1 U_n + \frac{1}{4} L_2 U_n$.

D'après la question précédente, on a $L_1 U_n = E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc
$\frac{1}{4} L_1 U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_{n+1}^2\right) = \frac{1}{4} E\left(X_n^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = u_n$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait donc bien à la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$: on a $v_{n+1} = E\left(X_{n+1}^2\right) - u_{n+1}$.

D'après la question **c.**, on a $E\left(X_{n+1}^2\right) = \frac{1}{4} E\left(X_n^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et d'après la question **d.**, on a $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a donc donc $v_{n+1} = \frac{1}{4} E\left(X_n^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a donc $v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(E\left(X_n^2\right) - u_n\right) = \frac{1}{4} v_n$.

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

f. D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0$.

Or, $v_0 = E\left(X_0^2\right) - u_0 = 4 - \frac{1}{2^{-1}} = 4 - 2 = 2$ et donc $v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On a donc $E\left(X_n^2\right) = u_n + v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

g. Soit $n \in \mathbb{N}$: on utilise la formule de Koenig-Huyghens :
$V(X_n) = E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right) - \frac{1}{4^{n-1}}$
$= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

PROBLEME 2

1. Etude d'une application linéaire.

a. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est constituée des vecteurs colonnes $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ exprimés dans la base (e_1, e_2, e_3) donc :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. On vérifie facilement que $M = A(2,1)$.

2. Propriétés de l'ensemble $\mathscr{E}$.

a. — $\mathscr{E}$ est non vide puisque la matrice nulle appartient à $\mathscr{E}$;
— Soit $A(a,b)$ et $A'(a',b')$ deux éléments de $\mathscr{E}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\lambda A + A' \in \mathscr{E}$:
$$\lambda A + A' = \lambda \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda b + b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}.$$
Donc $\lambda A + A' = A\left(\lambda a + a', \lambda b + b'\right) \in \mathscr{E}$.

$\mathscr{E}$ est donc un sous-espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

b. Soit $A(a,b) \in \mathscr{E}$: on a alors $A(a,b) = aI + bB$ donc $\mathscr{E} = \text{vect}(I,B)$ et (I,B) est donc une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
En outre, $aI + bB = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$ donc la famille (I,B) est libre : c'est une base de $\mathscr{E}$.

c. D'après la question précédent, la dimension de $\mathscr{E}$ est égale à 2.

d. D'après ce qui précède, $A_{a,b} = aI + bB$.

3. Etude de la matrice $B = A_{1,1}$.

a. $P_B = \text{Det}(XI - B) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ X-3 & X-1 & -1 \\ X-3 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$
$= (X-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X^2(X-3).$

b. Les valeurs propres de B sont les racines de son polynôme caractéristique P_B donc B admet deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 3$ de multiplicité 1.

c. On a E_1 =ker$(0I - B)$: on résout le système associé à la matrice $-B$ (ou B, ce qui revient au même!) :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a 1 pivot donc deux paramètres et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff x = -y - z$.

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En outre, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils constituent une base de E_1. Donner une base (v_1, v_2) de $\mathscr{E}_1$. On choisira v_1 et v_2 tels que dans la base $\mathscr{B}$ leurs composantes ne contiennent que des -1, 0 et 1 et tels que leurs premières composantes soit 1.

Ainsi, en prenant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, (v_1, v_2) est une base de E_1.

d. En raisonnant de façon analogue, on montre facilement que $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de E_2.

e. On montre facilement que l'inverse de cette matrice est $\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

f. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après les formules de changement de base, la matrice $P^{-1}BP$ est la matrice de B dans la base (v_1, v_2, v_3). Cette base étant constituée de vecteurs propres de B, cette matrice est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on a bien $B = P.D.P^{-1}$.

4. Etude de la matrice $A_{a,b}$.

a. $Av_1 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ 0 \end{pmatrix} = (a-b)\,v_1$.

De même, $Av_2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\,v_2$.

De même, $Av_3 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ a+2b \end{pmatrix} = (a+2b)\,v_3$.

Ainsi, v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de $A(a,b)$ associés à la valeur propre $a-b$ et v_3 est un vecteur propre de $A(a,b)$ associé à la valeur propre $a+2b$.

b. D'après les questions précédentes, la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres de $A(a,b)$: donc $A(a,b)$ est diagonalisable dans

c. — Premier cas : $a - b = a + 2b$ soit $b = 0$: alors $\mathrm{Sp}(A) = \{a\}$.
— Deuxième cas : $a - b \neq a + 2b$ soit $b \neq 0$: alors $\mathrm{Sp}(A) = \{a-b, a+2b\}$

5. Etude de $A_{2/3,-1/3}$.

a. On montre facilement que le système $\left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& 1 \\ a+2b &=& 0\end{array}\right.$ admet une unique solution : le couple (2/3,-1/3).

b. D'après ce qui précède, $a-b$ et $a+2b$ sont les valeurs propres de la matrice $A(a,b)$ donc $A_{2/3,-1/3}$ admet 1 (de multiplicité 2) et 0 (de multiplicité 1) comme valeur propres.

c. On montre facilement par récurrence (démonstration déjà faite à de multiples reprises) que pour tout entier naturel n, on a $A_{2/3,-1/3} = P.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n.P^{-1}$.

On a donc $\left(A_{2/3,-1/3}\right)^{2021} = P.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.P^{-1}$ et on montre facilement que cette matrice est égale à $A_{2/3,-1/3}$

PROBLEME 3

Partie A

1. $I_{1,n} = \displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t$.
On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(nt)$.
On a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\dfrac{\cos(nt)}{n}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc d'après la formule d'IPP :
$I_{1,n} = \left[-\dfrac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + \left[\dfrac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$
On a donc $I_{1,n} = \dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$.

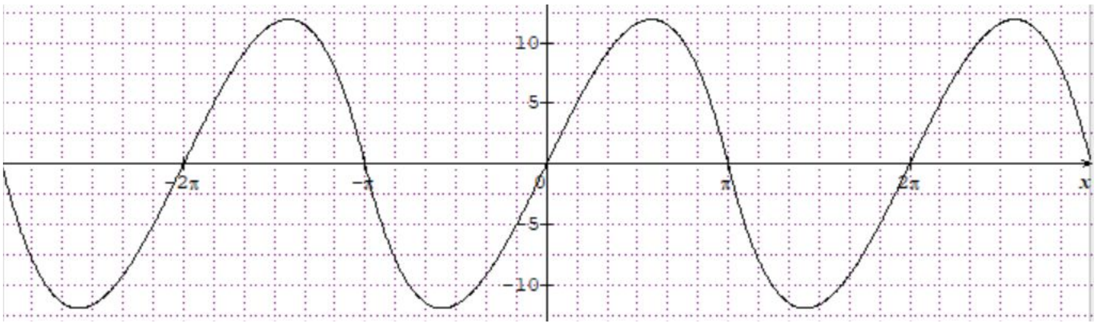
2. Soit $k \geq 3$. On pose $u(t) = t^k$ et $v'(t) = \sin(nt)$.
On a donc $u'(t) = kt^{k-1}$ et $v(t) = -\dfrac{\cos(nt)}{n}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc d'après la formule d'IPP :
$I_{k,n} = \left[-\dfrac{t^k\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \dfrac{k}{n}\displaystyle\int_0^\pi t^{k-1}\cos(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{k}{n}\displaystyle\int_0^\pi t^{k-1}\cos(nt)\mathrm{d}t$
Pour calculer $\displaystyle\int_0^\pi t^{k-1}\cos(nt)\mathrm{d}t$, on va utiliser à nouveau la formule d'IPP : On pose $u(t) = t^{k-1}$ et $v'(t) = \cos(nt)$.
On a donc $u'(t) = (k-1)t^{k-2}$ et $v(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc d'après la formule d'IPP :
$\displaystyle\int_0^\pi t^{k-1}\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{t^{k-1}\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \dfrac{k-1}{n}\displaystyle\int_0^\pi t^{k-2}\sin(nt)\mathrm{d}t = 0 - \dfrac{k-1}{n}I_{k-2,n}$.
On donc bien $I_{k,n} = \dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$.

3. On utilise l question précédente avec $k = 3$:
$I_{3,n} = \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{3\times 2}{n^2}I_{1,n} = \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.

4. $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\pi^2 t - t^3\right)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi^2 I_{1,n} - I_{3,n}$
$= \pi^2 \times \dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.
Donc $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Soit $t \in [-\pi,\pi]$: on a $f(-t) = \pi^2(-t) - (-t)^3 = -f(t)$ donc f est impaire.
2. f est dérivable sur $[-\pi,\pi]$ et on a $f'(t) = \pi^2 - 3t^2$. On a donc $f'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$. On en déduit que f est décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \pi\right]$, et est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$.
3. $f(\pi) = 0$ et comme f est impaire sur $[-\pi,\pi]$, on a $f(-\pi) = 0$. Ainsi, la fonction f est continue en $_\pi$ et π, et par périodicité elle est donc continue en tout réel de la forme $k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Comme elle est clairement continue en tous les autres réels, elle est continue sur $\mathbb{R}$. **Représentation graphique :**



4. On note $S_f(t)$ la série de Fourier de f en $t \in \mathbb{R}$.
   a. Comme f est impaire, on a :
   $$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n & = & 0 \end{cases}$$
   b. f étant impaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc $b_n = 12\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.
   c. On a $S_f(t) = 12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nt)$.
5. La fonction f est $2-\pi$ périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en t converge vers $f(t)$.
6. D'après la question précédente, on a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   Or, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^3}{8}$ et, pour n pair, $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ et pour n impair égal à $2p+1$, on a $\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = (-1)^p$ donc :
   $\frac{3\pi^3}{8} = 12\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+1)^3}(-1)^p$.
   Donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.
7. $\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\pi^2 t - t^3\right)^2\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\pi^4 t^2 - 2\pi^2 t^4 + t^6\mathrm{d}t = \left[\frac{\pi^4 t^3}{3} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right]_0^{\pi}$
   $= \frac{\pi^7}{3} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{7} = \frac{8\pi^7}{105}$
   Donc $\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{8\pi^7}{105}$.

8. La fonction f est $2-\pi$ périodique et continue par morceaux. On peut donc utiliser l'égalité de Parseval :

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ soit :

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{12(-1)^{n+1}}{n^3}\right)^2.$

On a donc $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{8\pi^7}{105} = 144\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^6}$ et donc :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^6} = \dfrac{\pi^6}{945}.$

a. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On a $\displaystyle\int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{n^6}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n^6}\int_{n-1}^{n}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n^6}.$

Pour $t \in [n-1,n]$, on a $\dfrac{1}{t^6} \geq \dfrac{1}{n^6}$ (fonction décroissante) et donc

$\displaystyle\int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{t^6}\mathrm{d}t \geq \int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{n^6}\mathrm{d}t$

On a bien $\dfrac{1}{n^6} = \displaystyle\int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{n^6}\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{t^6}\mathrm{d}t.$

b. Soit N un entier supérieur ou égal à 1, et M un entier supérieur à N.

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{M}\dfrac{1}{n^6} = \sum_{n=N+1}^{M}\int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{n^6}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=N+1}^{M}\int_{n-1}^{n}\dfrac{1}{t^6}\mathrm{d}t$

Donc $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{M}\dfrac{1}{n^6} \leq \int_{N}^{M}\dfrac{1}{t^6}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{-1}{5t^5}\right]_N^M = \dfrac{-1}{5M^5} + \dfrac{1}{5N^5}$

On a donc $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{M}\dfrac{1}{n^6} \leq \dfrac{1}{5N^5}$ donc :

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^6} \leq \dfrac{1}{5N^5}.$

Partie C

1. Fonction **fin(epsilon)** :

```python
# Créé par TDR, le 12/01/2021 en Python 3.4
def fin(epsilon):
    N=1
    while 1/(5*N**5)>epsilon:
        N=N+1
    return N
```

2. Fonction **somme(N)** :

```python
def somme(N):
    somme_partielle=0
    for i in range(1,N+1):
        somme_partielle=somme_partielle+1/i**6
    return somme_partielle
```

3. Fonction **approxpi6(epsilon)** :

```python
def approxipi6(epsilon):
    N=fin(epsilon)
    return somme(N)
```

FIN