Concours Blanc n°1 (CCINP)

Durée : 4h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculatrices interdites

Le sujet est composé de trois problèmes complètement indépendants.

PROBLEME 1

Rappel des notations
On rappelle que pour X une variable aléatoire, on désigne par $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
Etant donnés deux évènements A et B, la notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Contexte
On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants $0, 1, 2; 3, \ldots$.
Ces deux ampoules sont indépendantes l'une de l'autre.
A l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.
A chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout entier naturel n, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est-à-dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$. Déterminer la variance de X_0.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a
$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \qquad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$
3. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :
$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$
$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$.
4. Soit $n \geq 0$. A l'aide de la formule des probabilité totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0), P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi.
On introduit les matrices de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul de l'espérance :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.

b. Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.

c. Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.

2. Calcul du moment d'ordre 2
On rappelle la formule du transfert : pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) P(X = k).$$

a. En appliquant cette formule du transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de L_2 et U_n.

b. Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_{n+1}^2\right) = \dfrac{1}{4} E\left(X_n^2\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
*On pourra utiliser les résultats de la question **1.**.*

d. On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

e. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = E\left(X_n^2\right) - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.

f. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de n.

g. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n.

PROBLEME 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

Pour a et b deux réels, soit la matrice $A_{a,b}$ donnée par

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Nous introduisons aussi les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de la forme $A_{a,b}$:

$$\mathscr{E} = \left\{A_{a,b}; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1. Etude d'une application linéaire.

a. Donner l'expression de la matrice M représentative de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.

b. Pour quelles valeurs de a et b a t-on $M = A_{a,b}$?

2. Propriétés de l'ensemble $\mathscr{E}$.

a. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que (I, B) est une base de $\mathscr{E}$.

c. Donner la dimension de $\mathscr{E}$.

d. Donner les composantes de $A_{a,b}$ dans la base (I, B).

3. Etude de la matrice $B = A_{1,1}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique P_B de B.

b. Montrer que B a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 que l'on précisera et dont on donnera les multiplicités (on choisira $\lambda_1 < \lambda_2$). On notera $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

c. Donner une base (v_1, v_2) de $\mathscr{E}_1$. On choisira v_1 et v_2 tels que dans la base $\mathscr{B}$ leurs composantes ne contiennent que des -1, 0 et 1 et tels que leurs premières composantes soit 1.

d. Donner une base (v_3) de $\mathscr{E}_2$. On choisira v_3 tel que dans la base $\mathscr{B}$ la première composante soit 1.

e. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

f. Donner un matrice D diagonale, une matrice P et son inverse P^{-1} que l'on précisera, telle que $B = P.D.P^{-1}$.

4. Etude de la matrice $A_{a,b}$.

a. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont des vecteurs propres de $A_{a,b}$. On précisera les valeurs propres associées.

b. En déduire que la matrice $A_{a,b}$ est diagonalisable.

c. Préciser le spectre de la matrice $A_{a,b}$.

5. Etude de $A_{2/3,-1/3}$.

a. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} a-b & = & 1 \\ a+2b & = & 0 \end{array}\right.$

b. Déduire de ce qui précède les valeurs propres de $A_{2/3,-1/3}$.

c. Calculer $\left(A_{2/3,-1/3}\right)^{2021}$.

PROBLEME 3

On considère la fonction $2-\pi$ périodique $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\ f(t)=\pi^2 t-t^3.$$

Partie A

Pour k entier naturel impair et n entier naturel non nul, on considère les intégrales

$$I_{k,n}=\int_0^{\pi} t^k\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_{1,n}$.

2. Montrer que pour $k\geq 3$, $I_{k,n}=\dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n}-\dfrac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$.

3. En déduire que $I_{3,n}=\dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.

4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=\frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Etudier la parité de la fonction f sur $[-\pi;\pi]$.

2. Etudier les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.

3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? On justifiera soigneusement la réponse.

4. On note $S_f(t)$ la série de Fourier de f en $t\in\mathbb{R}$.

  a. Calculer a_0 et a_n pour $n\geq 1$.

  b. En utilisant la question **4.** de la partie A, montrer que pour tout entier $n\geq 1$, on a $b_n=12\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

  c. Ecrire la série de Fourier de f.

5. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la série de Fourier de f en t converge vers $f(t)$.
On citera avec précision le théorème utilisé.

6. Calculer $S_f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{8\pi^7}{105}$.

8. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$. *On citera avec précision le théorème utilisé.*

  a. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n^6}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^6}\mathrm{d}t\leq\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$.

  b. Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\leq\frac{1}{5N^5}$.

Partie C

On pourra admettre dans cette partie d'algorithmique les deux résultats démontrés dans la partie B :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}.$$

1. Ecrire en Python une fonction **fin(epsilon)** prenant pour argument un réel **epsilon** et renvoyant le plus petit entier naturel non nul N tel que $\dfrac{1}{5N^5} \leq$ epsilon.

2. Ecrire une fonction **somme(N)** prenant pour argument un entier N strictement positif et renvoyant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^6}$.

3. En utilisant les questions précédentes, écrire un fonction **Approxpi6(epsilon)** renvoyant une approximation de π^6 à epsilon près.

FIN