Chapitre 7 : Probabilité sur un univers dénombrable et variables aléatoires discrètes.

1 Probabilités sur un univers dénombrable

Définition 1 : ensemble dénombrable

Soit E un ensemble. E est dit dénombrable lorsqu'il peut s'écrire sous la forme

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Remarque
Cela signifie que l'on peut énumérer un à un les éléments de E

Exemples 1

1. $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
4. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
6. $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition 2 : expérience aléatoire

Une expérience aléatoire sur un univers dénombrable est une expérience dont :
- on connait les issues possibles. L'ensemble des issues, appelé univers et noté Ω est dénombrable
- on ne sait pas, avant la réalisation de l'expérience, laquelle des issues sera obtenue.

Définition 3 : événement

On considère une expérience aléatoire et on note Ω l'univers dénombrable associé.
On appelle événement toute partie de Ω.

Définition 4 : système complets d'événements

Soit Ω un univers dénombrable et soit (A_n) une suite finie ou infinie d'événements.
On dit que (A_n) est un système complet d'événements lorsque :

— Les événements sont incompatibles **deux à deux** : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$.

— Les événements "recouvrent" tout l'univers : $\bigcup A_n = \Omega$.

Exemples 2

1. On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}^*$.
   Proposer quatre systèmes complets d'événements : deux finis et deux infinis dénombrables.
2. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie et on note la face obtenue.
   a. Décrire l'univers.
   b. Proposer trois événements de cardinal infini.
   c. Proposer quatre systèmes complets d'événements : deux finis et deux infinis dénombrables.
3. On considère l'expérience suivante : on construit un mot à partir des lettres tirées au hasard A ou B et on s'arrête quand on veut..
   a. Vérifier que l'univers est dénombrable.
   b. Proposer trois événements de cardinal infini.
   c. Proposer quatre systèmes complets d'événements : deux finis et deux infinis dénombrables.

Définition 5 : probabilité sur un univers dénombrable

Une probabilité sur un univers dénombrable Ω est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des événements, dans $[0;1]$ et vérifiant :
- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Exemple 3

On tire un nombre entier naturel non nul au hasard. ω_n est l'issue "le nombre n a été tiré".
L'univers Ω est donc $\mathbb{N}^*$
Supposons qu'une probabilité P soit définie sur cet univers telle que

$$P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Vérifier qu'on a bien $P(\Omega) = 1$.
2. Calculer la probabilité des événements :
   a. A : "Le nombre tiré est pair".
   b. B : "Le nombre tiré est strictement inférieur à 5".
   c. C : "Le nombre tiré est supérieur ou égal à 10".
   d. D : "Le reste de la division euclidienne du nombre tiré par 3 est 1".

Exemple 4

1. Les fonction suivantes définissent-elles des probabilités sur $\Omega = \mathbb{N}^*$?
   a. $P(n) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n}$.
   b. $P(n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. Peut-on définir une probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$?

Définition 6 : prababilité conditionnelle

Soit Ω un univers dénombrable et A et B deux événements sur cet univers tels que $P(B) > 0$.
La probabilité de A sachant B est le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque
Cette définition se comprend si on l'illustre part un chemin sur un arbre de probabilité.

Propriété 1 : formule de Bayes

Soit Ω un univers dénombrable et A et B deux événements sur cet univers tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.
Alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Remarque
Cette propriété se comprend aisément si on l'illustre part un chemin sur un arbre de probabilité.

Propriété 2 : formule des probabilités composées

Dans un arbre de probabilités, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches
Autrement dit :
Si (A_n) est une suite d'événements telle que $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \neq 0$ alors

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) \times P_{A_0\cap A_1}(A_2) \times P_{A_0\cap A_1\cap A_2}(A_3) \times \dots$$

Propriété 3 : formule des probabilités totales

Soit Ω un univers dénombrable. Si (A_n) est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)$$

Définition 7 : événements indépendants

Soit Ω un univers dénombrable et A et B deux événements sur cet univers tels que $P(B) > 0$.
On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Remarque :
On a A et B indépendants si et seulement si $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$.

Définition 8 : événements mutuellement indépendants

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable. Soit A_1, A_2, ... A_n une famille **finie** d'événements.
On dit que les événements $\{A_i\}_{i=1..n}$ sont mutuellement indépendants si $P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$.

Exemples 5

1. On lance un dé parfait à huit faces. On note A_1 l'événement "la face obtenue est 1, 2, 7 ou 8", A_2 l'événement "la face obtenue est 2, 3, 6 ou 8" et A_3 l'événement "la face obtenue est 3, 4, 5 ou 8".
   Montrer que ces trois événements sont mutuellement indépendants.
2. On lance deux dés parfaits discernables (l'un est rouge, l'autre est bleu).
   — Soit E_1 l'événement : "la face obtenue sur le dé rouge est paire".
   — Soit E_2 l'événement : "la face obtenue sur le dé bleu est impaire".
   — Soit E_3 l'événement : "la somme des faces obtenues est paire".
   Montrer que les événements E_1, E_2 et E_3 sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Remarque :
Pour $n \geq 3$, le fait que les événements $\{A_i\}_{i=1..n}$ soient indépendants deux à deux n'implique pas que les événements soient mutuellement indépendants, comme le prouve le contre-exemple précédent.

Exemple 6 (exemple de synthèse)
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que le joueur A gagne lors de son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que le joueur A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs ont la même probabilité de gagner ?

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Généralités

Définition 9 : variable aléatoire

Soit Ω un univers dénombrable.
Une variable aléatoire réelle est une application définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble $\mathbb{R}$.

Définition 10 : loi de probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω.
On note $X(\Omega)$ l'image de Ω par X.

On appelle loi de probabilité de X, et on note P_X, la fonction

$$P_X : \left\{ \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X=x) \end{array} \right.$$

Définition 11 : fonction de répartition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω.
On appelle fonction de répartition de X l'application :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array} \right.$$

Exemples 7

1. On lance une pièce indéfiniment. On note X le rang d'apparition du premier "pile".
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X.
   - **b.** Donner la fonction de répartition X et représenter graphiquement cette fonction de répartition.
2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On connaît sa fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $x \in [k; k+1[$.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer $P(X \geqslant 7)$ et $P(X \in [3; 8[)$.
3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On connaît sa fonction de répartition $F_X(x) = 1 - \dfrac{1}{3^k}$ pour tout $x \in [k; k+1[$.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X.
   - **b.** Calculer $P(X > 3)$ et $P(2 \leqslant X \leqslant 7)$.

Propriété 4 : fonction de répartition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω prenant ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit F la fonction de répartition de X. Alors :

1. $\forall x < x_0, F(x) = 0$.
2. F est une fonction croissante.
3. F est une fonction constante sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}[$. $(n \in \mathbb{N})$.
4. La limite de la fonction F en $+\infty$ est 1.

Définition 12 : image d'une variable aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On définit alors la variable aléatoire réelle $Y = \varphi(X)$ par :

$$Y : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & Y(\omega) = \varphi(X(\omega)) \end{array} \right.$$

Exemple 8
Soit X la variable aléatoire définie à l'exemple 7.1
Donner la loi de X^2 et de X^3.

2.2 Espérance

Définition 13 : espérance

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω prenant ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
On dit que X est d'espérance finie lorsque la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est **absolument** convergente.

Dans ce cas, on appelle espérance de X, et on note $E(X)$ le réel $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Remarque
En pratique, la variable X prendra souvent des valeurs positives, si bien que l'absolue convergence équivaudra à la convergence.

Exemples 9

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que $P(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ définit une loi de probabilité pour X.
   b. X est-elle d'espérance finie ?
2. On reprend la variable aléatoire de l'exemple 7.1.
   a. Montrer que X est d'espérance finie.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.
      i. Donner une autre expression de $f_n(x)$.
      ii. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = x f_n'(x)$.
      iii. En déduire la valeur de $E(X)$.

Propriété 5 : linéarité de l'espérance

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur Ω. Soit λ et μ deux nombres réels.

On suppose que X et Y sont d'espérance finie.

Alors $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Propriété 6 : théorème de transfert

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω prenant ses valeurs dans $\Omega(X) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit X une variable aléatoire et soit f une fonction définie sur $\Omega(X) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Alors la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

Exemples 10

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que la loi de X est donnée par

$$P(X = k) = \frac{2}{3^k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

   a. Vérifier que $P(\Omega) = 1$.

   b. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

   c. Montrer que $X(X-1)$ est d'espérance finie et calculer $E(X(X-1))$.

   d. En déduire $E(X^2)$.

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0;1[$. On suppose que la loi de X est donnée par

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

   a. Vérifier que $P(\Omega) = 1$.

   b. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

   c. Montrer que $X(X-1)$ est d'espérance finie et calculer $E(X(X-1))$.

   d. En déduire $E(X^2)$.

3. (*) Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $\lambda \in]0;+\infty[$. On suppose que la loi de X est donnée par

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$$

   a. Vérifier que $P(\Omega) = 1$.

   b. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

   c. Montrer que $X(X-1)$ est d'espérance finie et calculer $E(X(X-1))$.

   d. En déduire $E(X^2)$.

2.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Propriété 7 : variance de X^2 et de X

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω.

Si la variable X^2 est d'espérance finie, alors la variable X est également d'espérance finie.

Remarque
La réciproque n'est pas vraie, par exemple avec l'exemple 7.2.

Définition - proposition 14 : variance d'une variable aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω.

Si la variable X^2 est d'espérance finie, on peut alors définir la variance de la variable X par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ce nombre est positif et on peut définir également l'écart-type de la variable aléatoire X par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemples 11
Calculer les variances des variables aléatoires définies dans les exemples 10.1, 10.2 et 10.3.

Propriété 8 : variance de $aX + b$

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω.
Alors pour tous réels a et b,

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Propriété 9 : inégalité de Bienaymé Tchebytchev

Soit (Ω, P) un espace probabilisé dénombrable, et X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω..
On pose $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$. Alors :

$$\forall a > 0, p(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Remarque
Cette inégalité signifie que la probabilité que la variable aléatoire s'écarte de plus de a de l'espérance est inversement proportionnelle au carré de a.

Exemple 12
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que l'espérance de cette variable aléatoire est 20 et que sa variance est de 5. Estimer (donner les valeurs possibles) la probabilité que X soit supérieure ou égale à 50 puis la probabilité que X soit compris entre 10 et 30.

3 Lois usuelles

3.1 Loi géométrique

Définition 15 : loi géométrique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On dit que la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Remarque
C'est la loi suivie par une variable aléatoire correspondant au rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Propriété 10 : variance d'une loi géométrique

Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}^*$ et p un réel de l'intervalle $]0;1[$. Si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ alors X^2 (et donc X) est d'espérance finie et

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemples 13

1. On tire un indéfiniment un dé à six faces équilibré. On note X le rang du premier jet qui donne un multiple de 3.
   a. Justifier que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

  b. Calculer $P(X=3)$, $P(X \geqslant 5)$ et $P(3 \leqslant X \leqslant 10)$.

  c. Donner l'espérance de X, sa variance et son écart-type.

2. Chaque jour, en se levant, Denis a une chance sur dix de se raser. On considère que chaque jour est indépendant des autres jours.
On posera X la variable aléatoire correspondant au premier jour où Denis se rase (aujourd'hui étant le jour 0).

  a. Donner la loi de X.

  b. Calculer la probabilité des événements suivants :

    i. A : "Dans trente jours, Denis est toujours barbu".

    ii. B : "Denis se rase dans la semaine".

    iii. C : "Denis se rase pendant la semaine prochaine".

  c. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3.2 Loi de Poisson

Exemple introductif
On suppose que le nombre moyen de météorites tombant annuellement sur le territoire français est de $\lambda = 10,2$.
Le but est d'estimer la probabilité que k météorites tombent une année non bissextile sur le territoire français. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de météorites tombant cette année non bissextile sur le territoire français.

1. Justifier qu'en découpant l'année 2016 en jours, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres $N = 365$ et $p = \dfrac{\lambda}{N} = \dfrac{10,2}{365}$ et donner en fonction de k la probabilité $P(X=k)$.

2. Pourquoi cette approximation n'est-elle pas totalement satisfaisante ? Comment réaliser une meilleure approximation ?

3. Donner une nouvelle approximation de $P(X=k)$ en découpant cette fois-ci l'année en secondes.

4. Montrer qu'en faisant tendre N vers l'infini, on obtient : $P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$\Rightarrow$ La loi de Poisson sert à étudier le nombre d'occurrences d'événements "rares" sur une période donnée.

Définition 16 : loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque
C'est la loi suivie par une variable aléatoire correspondant au nombre d'occurrences d'un même événement sur une période donnée, λ étant le nombre moyen d'occurrences sur cette période.

Attention : il faut que **la survenue de l'événement soit indépendante de ce qui s'est passé antérieurement** (on ne peut pas, par exemple, utiliser une loi de Poisson pour étudier le nombre de retards d'un étudiant donné en cours de maths...).

Propriété 11 : espérance et varaiance d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $\mathbb{N}$ et λ un réel positif. Si X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ alors X^2 (et donc X) est d'espérance finie et

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda$$

Exemples 14

1. Dans une grande entreprise, grâce à une étude statistique, on estime que le nombre moyen d'accidents par jour est de $0,05$. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'accidents pendant une semaine.
   - **a.** Justifier que X suit une loi de Poisson et donner son paramètre.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'en une semaine, il y ait exactement deux accidents.
   - **c.** Calculer la probabilité qu'en une semaine, il y ait au plus quatre accidents.
   - **d.** Calculer la probabilité qu'en une semaine il y ait au moins trois accidents.
2. Pour une femme, ayant eu entre 50 et 52 ans en 2014, on estime que le nombre d'enfants, noté X, suit une loi de Poisson de paramètre inconnu λ. Sur un échantillon représentatif de 1000 de ces femmes, on observe que 135 n'ont pas eu d'enfants.
   - **a.** Donner une estimation de λ.
   - **b.** Estimer la proportion de ces femmes ayant plus de trois enfants.

Remarque :
En pratique, pour le calcul des probabilités, on peut utiliser la formule brute, des tables, ou bien la calculatrice. Les tables ou la calculatrice donnent en général $P(X = k)$ et $P(X \leqslant k)$ (ou $P(X > k)$) .

Propriété 12 : approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant les lois $\mathscr{B}(n; p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque
En pratique, on parlera plutôt d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Cette approximation sera considéré comme "une bonne approximation" lorsque n est "grand" ($n \geqslant 30$ par exemple), p est "petit" ($p \leqslant 0,1$ par exemple) et np n'est "pas trop grand" ($np < 15$ par exemple).
On dira alors qu'on approxime la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par une loi de Poisson **de même espérance**, c'est-à-dire de paramètre $\lambda = np$.

Exemples 15

1. Une usine fabrique en série des pièces susceptibles de présenter un défaut dans 3% des cas. Soit X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de 250 pièces fait correspondre le nombre de pièces présentant un défaut.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.
   b. Par quelle loi peut-elle être approximée ? Préciser son paramètre.
   c. Calculer la probabilité que parmi 250 pièces, il y en ait au plus trois présentant un défaut.
2. Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des appels étant de deux minutes en moyenne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes en train de téléphoner à un instant donné.
   a. Montrer que l'on est en droit d'approcher la loi de X par une loi de Poisson.
   b. On suppose $L = 3$. Calculer la probabilité d'encombrement à un instant donné.
   c. Quelle doit être la valeur minimale de L pour qu'à un instant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.