CORRECTION TD Chapitre 4 : Réduction

Exercice 1

1. On montre facilement que $\chi_u(X) = X(X-1)(X+2)$.
2. Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0;1;-2\}$.
   Soit E_0, E_1 et E_{-2} les sous-espaces propres correspondants.
   On montre facilement que $E_0 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_1 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
3. Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u sont en somme directe, donc la famille constituée des trois vecteurs ci-dessus est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   Cette base étant constituée de vecteurs propres de u, la matrice de u dans cette base est bien évidemment diagonale.
4. Soit P la matrice donc les colonnes sont les coordonnées des vecteurs ci-dessus dans la base canonique :
$$P = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
   D'après les formules de changement de base, $P^{-1}.A.P$ est la matrice de u dans la base constituée de vecteurs propres donc elle est diagonale.

Exercice 2

1. On montre facilement que $\chi_u(X) = (X-2)(X+1)^2$.
2. Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1;2\}$.
   Soit E_{-1} et E_2 les sous-espaces propres correspondants.
   On montre facilement que $E_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)$, $E_1 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
3. Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc u est diagonalisable. Dans la base constituée des vecteurs définis précédemment, qui est une base de vecteurs propres, la matrice de u dans cette base est bien évidemment diagonale.
4. Soit P la matrice donc les colonnes sont les coordonnées des vecteurs ci-dessus dans la base canonique :
$$P = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
   D'après les formules de changement de base, $P^{-1}.A.P$ est la matrice de u dans la base constituée de vecteurs propres donc elle est diagonale.

Exercice 3

1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ et on le factorise par exemple en posant $Y = X^2$.
Finalement, on trouve $\chi_M(X) = (X-2)(X-3)(X+2)(X+3)$ et $\mathrm{Sp}(M) = \{-3, -2, 2, 3\}$.
En nommant E_{-3}, E_{-2}, E_2 et E_3 les sous-espaces propres correspondants, on trouve :
$E_{-3} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-7\\7\end{pmatrix}\right)$, $E_{-2} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$, $E_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-3\\7\\7\end{pmatrix}\right)$

2. Le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples donc M est diagonalisable.

3. La famille constituée des vecteurs ci-dessus est une famille libre (puisque les sous-espaces propres sont en somme directe) de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$. La matrice de passage P est la matrice constituée des colonnes des coordonnées de ces vecteurs exprimées dans la base canonique, soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -3 \\ -7 & -2 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. On note D la matrice $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Par récurrence immédiate, on montre facilement que pour $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k = P.D^k.P^{-1}$.
On détermine facilement $P^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -7 & 7 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
On a alors, pour $k \in \mathbb{N}$:
$$M^k = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -3 \\ -7 & -2 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -7 & 7 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse à l'aide de démonstrations, d'exemples ou de contre-exemples selon le cas.

1. FAUX : la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'admet aucune racine réelle.
2. VRAI : la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$ qui admet deux racines réelles.
3. VRAI : voir **2.**
4. VRAI : le polynôme caractéristique de toute matrice A admet 2 valeurs propres complexes distinctes ou non.
5. FAUX : si le polynôme caractéristique admet une valeur propre complexe non réelle, alors la seconde valeur propre est le conjugué de celle-ci, qui n'est pas un nombre réel.
6. FAUX : si le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre réelle alors il en admet une seconde (éventuellement la même si c'est une racine double)
7. FAUX : le polynôme caractéristique de toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est un polynôme à coefficients réels et de degré impair donc il admet nécessairement une racine.

Exercice 5

1. A est une matrice 3×3 dont les valeurs propres sont 1, 2 et 4.
   Démontrer ou infirmer par un contre-exemple les affirmations suivantes :
   — 0 n'est pas valeur propre de A donc A est injective.
   — A possède trois valeurs propres distinctes donc chaque sous-espace propre de A est de dimension 1, et la somme des ces dimensions est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc A est diagonalisable.
   — A n'est pas diagonalisable
2. A est injective pour les mêmes raisons que dans la question précédente. En revanche, A peut être diagonalisable mais ne l'est pas nécessairement, tout dépend de la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2, qui est de multiplicité 2. Si $\dim(E_2) = 2$ alors A est diagonalisable, si $\dim(E_2) = 1$ alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6

Le principe est de réduire la matrice pour calculer la puissance demandée...
On montre facilement que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-2)(X-4)^2$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$.
En nommant E_2 et E_4 les sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres 2 et 4, on montre que :
$E_2 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_4 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Ces trois vecteurs constituent une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car E_2 et E_4 sont en somme directe), et dans la base constituée de ces trois vecteurs, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A s'écrit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on montre par récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$$

.
Le calcul de P^{-1} est immédiat et finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

1. **a.** On montre facilement que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-3)\left(X^2-6X+12\right)$ et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3\}$, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{3, 3+\mathrm{i}\sqrt{3}, 3-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$

   b. 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

   c. Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En revanche, le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$ et A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. On pose $B = A - 3I_3$.

   a. On a $B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^6 = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 27 & -27 & -27 \\ -27 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On conjecture donc la propriété suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad B^{2k} = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ -(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Démontrons cette propriété par récurrence.

   <u>**Initialisation**</u> $(k = 1)$:

   Pour $k = 1$, la propriété s'écrit $B^2 = \begin{pmatrix} (-3)^1 & 0 & 0 \\ -(-3)^1 & (-3)^1 & (-3)^1 \\ (-3)^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui est vrai d'après le calcul de B^2 effectué auparavant.

   <u>**Hérédité**</u> :

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $B^{2k} = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ -(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on veut montrer que $B^{2k+2} = \begin{pmatrix} (-3)^{k+1} & 0 & 0 \\ -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-3)^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Or, $B^{2k+2} = B^2.B^{2k} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ -(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $B^{2k+2} = \begin{pmatrix} -3^{k+1} & 0 & 0 \\ 3.(-3)^k + 3.(-3^k) - 3.(-3)^k & (-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-3)^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^{k+1} & 0 & 0 \\ -(-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-3)^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad B^{2k} = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ -(-3)^k & (-3)^k & (-3)^k \\ (-3)^k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On montre de même la formule suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 2.(-3)^k & -(-3)^k & -(-3)^k \\ 5.(-3)^k & -(-3)^k & -(-3)^k \\ 2.(-3)^k & -(-3)^k & -(-3)^k \end{pmatrix}$$

De même, conjecturer une formule pour B^{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$.

b. La matrice B commute avec la matrice I_3 . On peut donc utiliser la formule du binône de Newton pour les matrices et on a donc, pour tout entier n :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k$$

Exercice 8

1. En posant, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A.X_n$$

2. On montre par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Déterminer la solution générale revient donc à calculer A^n pour tout entier naturel n.
Pour ce faire, on cherche à réduire la matrice A.
On calcule donc son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$.
On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ et A est diagonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$.
On montre facilement qu'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $-1/2$ est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Dans la base (v_1, v_2), la matrice de l'endomorphisme associé à A est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
En outre, en posant $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on montre par récurrence immédiate que pour tout entier naturel n, on a $A^n = P.D^n.P^{-1}$
On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.
On a donc la solution générale :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & \left(-1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) x_0 + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) y_0 \\ y_n & = & \left(-2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) x_0 + \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) y_0 \end{array} \right.$$

3. Pour $x_0 = 0$ et $y_0 = -1.$, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & -1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ y_n & = & -2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array} \right.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = -2$

4. Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ y_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array} \right.$$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

5. X est un vecteur d'équilibre si et seulement si $AX = X$ donc si et seulement si $X = 0$ ou bien X est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
D'après les questions précédentes, tous les vecteurs colinéaires à v_1 sont donc des vecteurs d'équilibre.

Exercice 9

La matrice A a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$, tout comme la matrice B. Il est donc possible que ces deux matrice soient semblables.
1 est une valeur propre de multiplicité 1 de A et B donc la dimension des sous-espaces propres respectifs relatifs à cette valeur propre est 1.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 de A est $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 de B est $\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de la matrice B est égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, ce qui n'est pas le cas pour A.
A n'est pas diagonalisable alors que B l'est : A et B ne sont pas semblables.

Exercice 10

On obtient facilement le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(X) = x^3 - 3zx - z^2 - z$.
Ce polynôme admet trois racines complexes non nécessairement distinctes... Si les trois racines complexes sont distinctes alors A sera diagonalisable. On doit donc étudier les éventuelles racines doubles.
On montre facilement que $\chi'_A(X) = 3X^2 - 3z$, donc les racines sont $z^{1/2}$ et $(-z)^{1/2}$.
On a $\chi_A\left(z^{1/2}\right) = z\left(z + 2z^{1/2} + 1\right) = z\left(z^{1/2} + 1\right)^2$.
On a donc $\chi_A\left(z^{1/2}\right) = 0 \iff z = 0$ ou $z^{1/2} + 1 = 0$ soit $z = 0$ ou $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
Or, i et $-$i ne sont pas racines de χ_A donc la seule valeur à conserver est $z = 0$.
De même, $\chi_A\left(-z^{1/2}\right) = z\left(z - z^{1/2} + 1\right) = z\left(z^{1/2} - 1\right)^2$.
On a donc $\chi_A\left(z^{1/2}\right) = 0 \iff z = 0$ ou $z^{1/2} - 1 = 0$ soit $z = 0$ ou $z = 1$.
Or, 1 n'est sont pas racine de χ_A donc la seule valeur à conserver est $z = 0$.
Finalement, si $z \neq 0$ alors le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable.
Pour $z = 0$, on a $\chi_A(X) = X^3$. Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle, ce qui est clairement faux.

$$A \text{ est diagonalisable } \iff z \neq 0$$

Exercice 11

On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On montre facilement que $\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2$.
En outre, on a $E_{-1} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée : A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, les formules de changement de base permettent d'affirmer que :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Par commodité, on appellera $\mathscr{A}$ l'anti-commutant de A. Pour M une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1}.M.P$. On a donc :
$M \in \mathscr{A} \Longleftrightarrow AM = MA \Longleftrightarrow \left(P.D.P^{-1}\right).\left(P.N.P^{-1}\right) = \left(P.N.P^{-1}\right).\left(P.A.P^{-1}\right)$.
$\Longleftrightarrow P.D.\left(P^{-1}.P\right).N.P^{-1} = P.N.\left(P^{-1}.P\right).D.P^{-1} \Longleftrightarrow P.(D.N).P^{-1} = P.(N.D).P^{-1}$
$\Longleftrightarrow D.N = N.D$
On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a donc $D.N = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $N.D = \begin{pmatrix} -a & 2b & 2c \\ -d & 2e & 2f \\ -g & 2h & 2i \end{pmatrix}$
Donc $N.D = -D.N \Longleftrightarrow N = 0$ et donc $M = 0$
On a donc $\mathscr{A} = \{0\}$.

3. En notant $\mathscr{C}$ le commutant de A et avec le même raisonnement que précédemment, on a
$N.D = D.N \Longleftrightarrow b = c = d = g = 0$ et donc $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$.
Finalement, $M = P.N.P^{-1} = \begin{pmatrix} a-f & f & -a+e+f \\ a-i & i & -a+h+i \\ -f & f & e+f \end{pmatrix}$ On pose :
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ est génératrice de $\mathscr{C}$ (il est d'ailleurs évident qu'elle est

libre et que c'est donc une base de $\mathscr{C}$ et :

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM - MA = 0\} = \operatorname{vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5).$$

Exercice 12

En posant $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -8 \\ 8 & -1 & -8 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier $n, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = A.X_n$.
Par récurrence immédiate, on a, pour tout entier n, $X_n = A^n.X_0$. On doit donc calculer les puissances de la matrice A.
On montre facilement que $\chi_A(X) = (X+1)(X-3)^2$.
En outre, on a $E_{-1} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée : A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, les formules de changement de base permettent d'affirmer que :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On montre par récurrence immédiate que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a :

$X_n = A^n.X_0 = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} -2.(-1)^n + 3^{n+1} & (-1)^n - 3^n & 2.(-1)^n - 2.3^n \\ -2.(-1)^n + 2.3^n & (-1)^n & 2.(-1)^n - 2.3^n \\ -2.(-1)^n + 2.3^n & (-1)^n - 3^n & 2.(-1)^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = w_n = (-1)^n$$

Exercice 13

Comme l'opérateur de dérivation est linéaire, u est clairement linéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}^2[X]$: on écrit $P = aX^2 + R$ avec $\deg(R) < 2$ et :
$u(P) = 2aX^3 + 2XR + P - 2aX^3 - X^2R' - P' = 2XR + P - X^2R' - P'$.
Or, $\deg(R) < 2$ donc $\deg(2XR) < 3$, $\deg(R') < 1$ donc $\deg(X^2R') < 3$ et $\deg(P') < 2$ donc $\deg(u(P)) < 3$ et u est bien définie.
On cherche l'image des vecteurs de la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

— $u(1) = (2X+1).1 - (X^2-1).0 = 2X+1$
— $u(X) = (2X+1).X - (X^2-1).1 = X^2+X+1$
— $u(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1).2X = X^2+2X$

Ainsi, la matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On montre facilement que $\chi_u(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$.
Le polynôme caractéristique de u est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc u est diagonalisable. On montre facilement que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres respectives -1; 1 et 3 sont $P_1 = 1 - 2X + X^2 = (X-1)^2$, $P_2 = -1 + X^2 = (X-1)X+1)$ et $P_3 = 1 + 2X + 2X^2 = (X+1)^2$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est libre puisque constitué de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes et comme c'est une famille libre de 3 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, c'est une base de cet espace vectoriel

Dans la base (P_1, P_2, P_3), la matrice D de u est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

1. Les données de l'énoncé permettent d'affirmer que $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$
2. De façon analogue à la question précédente, on a $X_{n+1} = MX_n$.
3. On montre facilement que $\chi_M(X) = X(X-1)(X-0,2)$ donc les valeurs propres de M sont 1,0 et 0,2.
4. Le polynôme caractéristique de M est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M est diagonalisable dans une base de vecteurs propres (V_1, V_2, V_3). On montre par récurrence immédiate la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$.
5. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = V_3$ où V_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, dont la somme des coordonnées est égale à 1 (100% du marché!). Finalement, on montre facilement que $V_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donc le marché est parfaitement équilibré entre les trois produits lorsque n tend vers $+\infty$.