Chapitre 9 : Équations différentielles

Exemples 1

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = 2\mathrm{e}^{t} - 4\mathrm{e}^{-4t}$ et $f''(t) = 2\mathrm{e}^{t} + 16\mathrm{e}^{-4t}$ donc $3f'' + 9f' - 12f = (6+18-14)\mathrm{e}^{t} + (48-36-12)\mathrm{e}^{-4t} = 0$ donc f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}(-8\cos 3t - 14\sin 3t) + \dfrac{2}{13}t + \dfrac{8}{169}$ et
$f''(t) = \mathrm{e}^{-2t}(-58\cos 3t - 4\sin 3t) + \dfrac{2}{13}$ donc
$f'' - 4f' + 13f = \mathrm{e}^{2t}[(-58+32+26)\cos 3t + (-4+56-52)\sin 3t] + t^2 + t\left(-\dfrac{8}{13} + \dfrac{8}{13}\right) + \left(\dfrac{2}{13} - \dfrac{8}{13} + \dfrac{6}{13}\right) = t^2$ donc f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exemples 2

1. L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $3r^2 + 30r + 75 = 0$.
Cette équation admet une racine double $r = -5$ donc :
$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (K_1 t + K_2)\,\mathrm{e}^{-5t} \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$
2. L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2 - 4r + 13 = 0$.
Cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $r_2 = 2 + 3\mathrm{i}$ donc :
$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{2t}(K_1\cos 3t + K_2 \sin 3t) \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$
3. L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2 + (3 - 2\sqrt{2})r - 6\sqrt{2} = 0$
Cette équation admet deux racines réelles $r_1 = 2\sqrt{2}$ et $r_2 = -3$ donc :
$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & K_1\mathrm{e}^{2\sqrt{2}t} + K_2\mathrm{e}^{-3t} \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$
4. L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $3r^2 - 6r + 6 = 0$.
Cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $r_2 = 1 + \mathrm{i}$ donc :
$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{t}(K_1\cos t + K_2 \sin t) \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

Exemples 3
Résoudre les équations différentielles suivantes

1. **Résolution de l'équation homogène :**
L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2 - r = 0$
Cette équation admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$ donc :
$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & K_1 \mathrm{e}^t + K_2 \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Recherche d'une solution particulière :
On cherche une solution sous la forme $f(t) = A\mathrm{e}^{-2t}$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = -2A\mathrm{e}^{-2t}$ et $f''(t) = 4A\mathrm{e}^{-2t}$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$4A\mathrm{e}^{-2t} - A\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} \Longleftrightarrow A = \frac{1}{3}$.
On a donc $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & K_1 \mathrm{e}^t + K_2 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2. **Résolution de l'équation homogène :**
L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 1 = 0$
Cette équation admet une racine réelle double $r = 1$ donc :
$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (K_1 t + K_2)\,\mathrm{e}^t \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Recherche d'une solution particulière :
1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution sous la forme $f(t) = \left(At^2 + Bt + c\right)\mathrm{e}^t$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = (2At + B)\,\mathrm{e}^t$ et $f''(t) = 2A\mathrm{e}^t$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$\mathrm{e}^t\left[At^2 + (-2A + B)\,t + (2A - 2B + C)\right] = \mathrm{e}^t \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & = & 1/2 \\ B & = & 1 \\ C & = & 1 \end{array} \right.$.
On a donc $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}t^2 + (K_1 + 1)\,t + (K_2 + 1)\right)\mathrm{e}^t \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. **Résolution de l'équation homogène :**
L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2 - 4r + 3 = 0$
Cette équation admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$ donc :
$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & K_1 \mathrm{e}^t + K_2 \mathrm{e}^{3t} \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
Recherche d'une solution particulière :
1 étant une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $f(t) = (At + B)\mathrm{e}^t$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = (At + A + B)\mathrm{e}^t$ et $f''(t) = (At + 2A + B)\mathrm{e}^t$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$(2A + B - 4A - 4B + 3B)\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \Longleftrightarrow A = -\frac{1}{2}$. Donc $f(t) = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t$ convient.
On a donc $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(K_1 - \frac{1}{2}t\right)\mathrm{e}^t + K_2 \mathrm{e}^{3t} \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

4. **Résolution de l'équation homogène :**
L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2-4r-3=0$
Cette équation admet deux racines réelles $r_1=-1$ et $r_2=4$ donc :
$\mathscr{S}_0=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & K_1\mathrm{e}^{-t}+K_2\mathrm{e}^{4t}\end{array}\quad (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$
Recherche d'une solution particulière :
1 étant une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $f(t)=(At+B)\mathrm{e}^{-t}$.
Pour $t\in\mathbb{R}$, on a $f'(t)=(-At+A-B)\mathrm{e}^{-t}$ et $f''(t)=(At-2A+B)\mathrm{e}^{-t}$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :
$(-2A+B-3A+3B-4B)\,\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}\iff A=-\dfrac{1}{5}$. Donc $f(t)=-\dfrac{1}{5}t\mathrm{e}^{-t}$ convient.
On a donc $\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \left(K_1-\dfrac{1}{5}t\right)\mathrm{e}^{-t}+K_2\mathrm{e}^{4t}\end{array}\quad (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$

5. **Résolution de l'équation homogène :**
L'équation différentielle est du second ordre à coefficients constants : on écrit l'équation caractéristique associée : $r^2-3r+2=0$
Cette équation admet deux racines réelles $r_1=1$ et $r_2=2$ donc :
$\mathscr{S}_0=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & K_1\mathrm{e}^{t}+K_2\mathrm{e}^{2t}\end{array}\quad (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$
Recherche d'une solution particulière :
On passe en complexe : $\cos t$ est la partie réelle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ donc on cherchera la partie réelle de l'équation dont le second membre est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. On cherche donc une solution sous la forme $f(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
Pour $t\in\mathbb{R}$, on a $f'(t)=A\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $f''(t)=-A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :
$(-A-3\mathrm{i}A+2A)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\iff A=\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{10}$. Donc $f(t)=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
On prend la partie réelle de $f(t)$ qui es égale à $\dfrac{1}{10}\cos t-\dfrac{3}{10}\sin t$.
On a donc $\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & K_1\mathrm{e}^{t}+K_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{10}\cos t-\dfrac{3}{10}\sin t\end{array}\quad (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$

6. On va appliquer le principe de superposition des solutions : on résout donc les deux équations différentielles $(E_1): y''-3y'+2y=\sin t$ et $(E_2): y''-3y'+2y=\cos t$.
On remarque que l'équation différentielle homogène a été résolue dans la question précédente, ainsi que (E_2).
Pour trouver une solution particulière à (E_1), il suffit de prendre la partie imaginaire de la fonction $f(t)$ trouvée à la question précédente. Cette partie imaginaire est égale à $\dfrac{3}{10}\cos t+\dfrac{1}{10}\sin t$.
En calculant la somme des deux solutions particulières de (E_1) et (E_2), on trouve une solution particulière de (E) égale à $\dfrac{2}{5}\cos t-\dfrac{1}{5}\sin t$.
On a donc $\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & K_1\mathrm{e}^{t}+K_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{2}{5}\cos t-\dfrac{1}{5}\sin t\end{array}\quad (K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$

Exemple 4

1. On a résolu cette équation différentielle à l'exemple 3 1.
Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = K_1\mathrm{e}^t + K_2 + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}$ et on a donc $f'(t) = K_1\mathrm{e}^t - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t}$.
On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} K_1 + K_2 + \dfrac{1}{3} & = & 0 \\ K_1 - \dfrac{2}{3} & = & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} K_1 & = & -\dfrac{1}{3} \\ K_2 & = & 0 \end{array}\right.$
La solution cherchée est donc $f(t) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^t \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}$.
2. On a résolu cette équation différentielle à l'exemple 3 6.
Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(t) = K_1\mathrm{e}^t + K_2\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$ et on a donc
$f'(t) = K_1\mathrm{e}^t + 2K_2\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{5}\cos t - \dfrac{2}{5}\sin t$.
On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & \dfrac{31}{10} \\ f'(0) & = & \dfrac{69}{10} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} K_1 + K_2 + \dfrac{2}{5} & = & \dfrac{31}{10} \\ K_1 + 2K_2 - \dfrac{1}{5} & = & \dfrac{69}{10} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} K_1 & = & -\dfrac{17}{10} \\ K_2 & = & \dfrac{22}{5} \end{array}\right.$
La solution cherchée est donc $f(t) = -\dfrac{17}{10}\mathrm{e}^t + \dfrac{22}{5}\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$

Exemples 5
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. Pour trouver des solutions polynômiales, on va raisonner par analyse-synthèse.
Analyse :
On suppose que l'équation différentielle admet une solution polynômiale P de degré $n \geq 0$: on pose $P(x) = a_n x^n + R(x)$ avec $\deg(R) < n$ et $a_n \neq 0$.
On a alors $P'(x) = n a_n x^{n-1} + R'(x)$ avec $\deg(R') < n-1$ et donc
$-4xP' = -4na_n x^n + R_1(x)$ avec $\deg(R_1) < n$.
En outre, $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} + R''(x)$ avec $\deg(R'') < n-2$ et donc
$\left(x^2-3\right)P'' = n(n-1)a_n x^n + R_2(x)$ avec $\deg(R_2) < n$.

   Si P est solution de (E) alors son terme de degré n est nul, soit
$(n(n-1) - 4n + 6)\, a_n = 0 \Longleftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 0$ puisque $a_n \neq 0$, et donc $n = 3$ ou $n = 2$.

   Synthèse :
Soit P une fonction polynômiale de degré 3, solution de (E).
On a alors $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $P'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ et $P''(x) = 6Ax + 2B$.
P est solution de $(E) \Longleftrightarrow$
$\left(x^2-3\right)(6Ax+2B) - 4x\left(3Ax^2+2Bx+C\right) + 6\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right) = 0$
$\Longleftrightarrow (-18A+2C)x - 6B + 6D = 0 \Longleftrightarrow C = 9A$ et $D = B$ avec A et B quelconques.
Ainsi, $P(x) = A\left(x^3+9x\right) + B\left(x^2+1\right)$
On a deux solutions linéairement indépendantes (ce sont des polynômes de degrés distincts) qui constituent donc une base des solutions de (E) :
$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\left(x^3+9x\right) + B\left(x^2+1\right) \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
2. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad \left(x^2+1\right)y'' - 2y = x$.
   a. Pour trouver la solution polynômiale, on va raisonner par analyse-synthèse.
   Analyse :
   On suppose que l'équation différentielle (E_0) admet une solution polynômiale P de degré $n \geq 0$: on pose $P(x) = a_n x^n + R(x)$ avec $\deg(R) < n$ et $a_n \neq 0$.
   On a alors $P'(x) = n a_n x^{n-1} + R'(x)$ avec $\deg(R') < n-1$

En outre, $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} + R''(x)$ avec $\deg(R'') < n-2$ et donc
$\left(x^2+1\right)P'' = n(n-1)a_n x^n + R_2(x)$ avec $\deg(R_2) < n$.

Si P est solution de (E_0) alors son terme de degré n est nul, soit
$(n(n-1)-2)\,a_n = 0 \Longleftrightarrow n^2 - n - 2 = 0$ puisque $a_n \neq 0$, et donc $n = -1$ (exclus) ou
$n = 2$: Si P est une solution polynômiale de (E_0) alors P est de degré 2.

Synthèse :
Soit P une fonction polynômiale de degré 2, solution de l'équation homogène associée.
On a alors $P(x) = Ax^2 + BX + c$, $P'(x) = 2Ax + B$ et $P''(x) = 2A$.
P est solution de
$(E_0) \Longleftrightarrow \left(x^2+1\right)2A - 2\left(Ax^2+Bx+c\right) = 0 \Longleftrightarrow -2Bx + 2A - 2C = 0 \Longleftrightarrow B = 0$ et
$C = A$ avec A quelconque.
Ainsi, $P(x) = x^2+1$ convient.

b. On pose $f(x) = k(x)P(x)$. On a donc $f'(x) = k'(x)P(x) + k(x)P'(x)$ et
$f''(x) = k''(x)P(x) + 2k'(x)P'(x) + k(x)P''(x)$.
f est solution de
$(E_0) \Longleftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(k''(x)P(x) + 2k'(x)P'(x) + k(x)P''(x)\right) - 2k(x)P(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow k(x)\left[\left(x^2+1\right)P''(x) - 2P(x)\right] + \left(x^2+1\right)^2 k''(x) + 4x\left(x^2+1\right)k'(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x^2+1\right)k''(x) + 4xk'(x) = 0$$

c. L'équation différentielle précédente est équivalente à $k''(x) + \dfrac{4x}{x^2+1}k'(x) = 0$.

On doit trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x}{x^2+1} = 2 \times \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est du type $2 \times \dfrac{u'}{u}$, et donc $2 \times \ln\left|x^2+1\right| = \ln\left[\left(x^2+1\right)^2\right]$ convient.
On a donc $k'(x) = \alpha \exp\left(-\ln\left[\left(x^2+1\right)^2\right]\right) = \dfrac{\alpha}{\left(x^2+1\right)^2}$.

d. On pose $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $v'(x) = 1$.
On a donc $u'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ et $v(x) = x$.
Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la formule d'IPP :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)} = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$$

On a donc $2\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)}$ soit :

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, x.$$

$k(x) = \alpha\left(\dfrac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, x\right)$ et finalement :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}\left(x + \left(x^2+1\right)\mathrm{Arctan}\, x\right)$$

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\left(x + \left(x^2+1\right)\mathrm{Arctan}\, x\right) + B\left(x^2+1\right) \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

e. On cherche une solution de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 1 (pour annuler le y'').

On voit immédiatement que $y = -\dfrac{x}{2}$ convient, et que donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{x}{2} + A\left(x + \left(x^2+1\right)\mathrm{Arctan}\, x\right) + B\left(x^2+1\right) \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Pour trouver la solution polynômiale, on va raisonner par analyse-synthèse.

Analyse :

On suppose que l'équation différentielle admet une solution polynômiale P de degré $n \geq 0$: on pose $P(x) = a_n x^n + R(x)$ avec $\deg(R) < n$ et $a_n \neq 0$.

On a alors $P'(x) = n a_n x^{n-1} + R'(x)$ avec $\deg(R') < n-1$ et donc

$(x+2)P' = n a_n x^n + R_1(x)$ avec $\deg(R_1) < n$.

En outre, $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} + R''(x)$ avec $\deg(R'') < n-2$ et donc

$x(x+1)P'' = n(n-1)a_n x^n + R_2(x)$ avec $\deg(R_2) < n$.

Si P est solution de (E) alors son terme de degré n est nul, soit

$(n(n-1) + n - 1)\, a_n = 0 \Longleftrightarrow (n-1)(n+1) = 0$ puisque $a_n \neq 0$, et donc $n = 1$.

Synthèse :

Soit P une fonction polynômiale de degré 1, solution de (E).

On a alors $P(x) = Ax + B$, et $P'(x) = A$.

P est solution de $(E) \Longleftrightarrow (x+2)A - (Ax+B) = 0 \Longleftrightarrow B = 2A$ avec A quelconque.

Ainsi, $P(x) = x+2$ convient.

Pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante de P, on utilise la méthode de variation de la constante : on pose $f(x) = k(x)P(x)$.

On a donc $f'(x) = k'(x)P(x) + k(x)P'(x)$ et

$f''(x) = k''(x)P(x) + k'(x)P'(x) + k'(x)P'(x) + k(x)P''(x)$.

f est solution de $(E) \Longleftrightarrow k(x)\left(x(x+1)P''(x) + (x+2)P'(x) - P(x)\right) +$

$k'(x)\left(x(x+1)2P'(x) + (x+2)P(x)\right) + x(x+1)P(x)k''(x) = 0$

$\Longleftrightarrow \left[2x(x+1) + (x+2)^2\right] k'(x) + x(x+1)(x+2)k''(x) = 0$

$\Longleftrightarrow \left(3x^2 + 6x + 4\right) k'(x) + x(x+1)(x+2)k''(x) = 0$

Sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty;-2[$, $I_2 =]-2;-1[$, $I_3 =]-1;0[$ et $I_4 =]0;+\infty[$, cette équation est différentielle s'écrit :

$$k''(x) + \frac{3x^2+6x+4}{x(x+1)(x+2)} k'(x) = 0$$

Pour résoudre cette équation différentielle en k' sur l'un quelconque de ces intervalles, on doit trouver une primitive sur cet intervalle de $x \mapsto \dfrac{3x^2+6x+4}{x(x+1)(x+2)}$.

Pour cela, on cherche A, B et C réels tels que pour tout x de cet intervalle, on ait :

$$\frac{3x^2+6x+4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par x et pour $x = 0$, on a $A = 2$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par $x+1$ et pour $x = -1$, on a $B = -1$.

En multipliant les deux membres de cette égalité par $x+2$ et pour $x = -2$, on a $C = 2$.

On a donc $\dfrac{3x^2+6x+4}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2}$

Une primitive de cette fonction sur l'intervalle choisi est donc $\ln\left(\dfrac{x^2(x+2)^2}{x+1}\right)$

On peut donc résoudre l'équation différentielle en k' et on trouve $k'(x) = \alpha\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2}$

On cherche maintenant une primitive de cette fonction sur l'intervalle choisi :
On cherche donc quatre réels A, B, C et D tels que pour tout réel x de cet intervalle on ait :

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

On peut cette fois procéder par identification :

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} = \frac{Ax(x+2)^2 + B(x+2)^2 + Cx^2(x+2) + Dx^2}{x^2(x+2)^2} = \frac{(A+C)x^3 + (4A+B+2C+D)x^2 + (4A+4B)x + 4B}{x^2(x+2)^2} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} A+C & = & 0 \\ 4A+B+2C+D & = & 0 \\ 4A+4B & = & 1 \\ 4B & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} D & = & -1/4 \\ C & = & 0 \\ A & = & 0 \\ B & = & 1/4 \end{array}\right.$$

On a donc $\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \dfrac{1/4}{x^2} + \dfrac{-1/4}{(x+2)^2}$

On a donc $k(x) = \alpha\left(-\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{4(x+2)}\right)$ et donc la solution cherchée est :

$$f(x) = \alpha\left(-\frac{x+2}{4x} + \frac{x+2}{4(x+2)}\right) = \alpha\left(-\frac{x+2}{4x} + \frac{1}{4}\right).$$

En appelant I l'un quelconque des intervalles définis précédemment, on a donc :

$$\mathscr{S}_I = \left\{\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A(x+2) + B\left(-\dfrac{x+2}{4x} + \dfrac{1}{4}\right) \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)$.
On a donc $y'(x) = \mathrm{e}^x y(x) + (1+\mathrm{e}^x)y'(x)$ et
$z''(x) = \mathrm{e}^x y(x) + \mathrm{e}^x y'(x) + (1+\mathrm{e}^x)y''(x) + \mathrm{e}^x y'(x) = \mathrm{e}^x y(x) + 2\mathrm{e}^x y'(x) + (1+\mathrm{e}^x)y''(x)$.
On s'aperçoit que $z''(x) + z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)" + 2\mathrm{e}^x y'(x) + (2\mathrm{e}^x+1)y(x)$ et l'équation différentielle devient :

$$z'' + z = x\mathrm{e}^x.$$

On a donc une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Pou trouver les solutions de l'équation homogène associée, on écrit l'équation caractéristique $r^2+1=0$, don les solutions sont i et $-$i.

On a donc $\mathscr{S}_0 = \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\cos x + B\sin x \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$: on a $f'(x) = (ax+a+b)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x$
f est solution de $(E') \iff \mathrm{e}^x(ax+2a+b) + \mathrm{e}^x(ax+b) = x\mathrm{e}^x$
$\iff \mathrm{e}^x(2ax+2a+2b) = x\mathrm{e}^x \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a & = & 1 \\ 2a+2b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1/2 \\ b & = & 1-/2 \end{array}\right.$

Une solution particulière est $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^x$.

On en déduit les solutions de (E) :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}(x-1)\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{array} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

5. Pour x dans un intervalle $I_k = \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, on pose $y(x) = z(t) = z(\sin x)$.
On a donc $y'(x) = \cos x z'(\sin x)$ et $y''(x) = -\sin x z'(\sin x) + \cos^2 x z''(\sin x)$.
$y"(x) + y'(x)\tan x - y(x)\cos^2 x = -\sin x z'(\sin x) + \cos^2 x z''(\sin x) + \sin x z'(\sin x) - \cos^2 x z(\sin x) = \cos^2 x\left(z''(\sin x) - z(\sin x)\right)$.
Sur I_k, on a $\cos x \neq 0$ donc cette équation est équivalente à :
$z''(t) - z(t) = 0$.
On montre facilement que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions du type $z(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$ avec A et B réels.
On en déduit les solutions de (E) sur I_k :

$$\mathscr{S}_{I_k} = \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\mathrm{e}^{\sin x} + B\mathrm{e}^{-\sin x} \end{array} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

6. Soit $\alpha \neq 0$: on cherche une solution de l'équation homogène sous la forme $y(x) = x^\alpha$ avec $x \neq 0$.
On a $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.
$x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \alpha(\alpha-1)x^\alpha + 4\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = (\alpha(\alpha-1) + 4\alpha + 2)x^\alpha$
y est solution de l'équation différentielle homogène si et seulement si
$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -2$ ou $\alpha = -1$.
On a donc deux solutions linéairement indépendantes sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$.

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} \end{array} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour $x \in]-1;1[$, on a $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.
On suppose qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$, qui soit solution de (E).
Pour $x \in]-R;R[$, on a $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$
Comme ces trois séries ont le même rayon de convergence, on a
$x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + 4n + 2]\, a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n$
On montre facilement que cette série entière a un rayon de convergence égal à 1. Par le théorème d'égalité des séries entières, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ \forall n \geq 1, a_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)} \end{array} \right.$$

La série entière $y_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}x^n$ est donc solution de l'équation différentielle sur $]-1;1[$.
Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $]-1;0[$ ou $]0;1[$ par $y(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + y_0(x)$.

Exemples 6

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:
Le système différentiel s'écrit alors $X'(t) = AX(t)$. On réduit la matrice A :

$\chi_A(X) = \det(XId - A) = \begin{vmatrix} X-4 & 2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-2)$.
Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Soit V_1 un vecteur propre associé à la valeur propre 3 : $V_1 \in \mathrm{Ker}(3Id - A)$.
$(3Id - A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc un pivot (y) et un paramètre (x) et donc $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Soit V_2 un vecteur propre associé à la valeur propre 2 : $V_2 \in \mathrm{Ker}(2Id - A)$.
$(2Id - A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc un pivot (y) et un paramètre (x) et donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La famille $\{V_1, V_2\}$ est une famille de deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
Dans cette base, la matrice A s'écrit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $X(t)$ dans cette base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Il existe donc deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que :

$$\begin{cases} \alpha(t) & = & k_1 \mathrm{e}^{3t} \\ \beta(t) & = & k_2 \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

D'après les formules de changement de base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} x(t) & = & 2k_1 \mathrm{e}^{3t} + k_2 \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) & = & k_1 \mathrm{e}^{3t} + k_2 \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:
Le système différentiel s'écrit alors $X'(t) = AX(t)$. On réduit la matrice A :
$\chi_A(X) = \det(XId - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 4 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = [X - (1-2\mathrm{i})][X - (1+2\mathrm{i})]$.
Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Soit V_1 un vecteur propre associé à la valeur propre $1-2\mathrm{i}$: $V_1 \in \mathrm{Ker}((1-2\mathrm{i})Id - A)$.
$((1-2\mathrm{i})Id - A) = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 4 \\ -1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_1 + \dfrac{1}{2\mathrm{i}} L_2$.
On a donc un pivot (x) et un paramètre (y) et donc $V_1 = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.
On montre de même qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $1+2\mathrm{i}$ est $V_2 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.
La famille $\{V_1, V_2\}$ est une famille de deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette base, la matrice A s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $X(t)$ dans cette base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Il existe donc deux constantes complexes $a_1 + \mathrm{i}b_1$ et $a_2 + \mathrm{i}b_2$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha(t) & = & (a_1 + \mathrm{i}b_1)\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ \beta(t) & = & (a_2 + \mathrm{i}b_2)\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{array} \right.$$

D'après les formules de changement de base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 2\mathrm{i}\left[(a_1 + \mathrm{i}b_1)\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} + (a_2 + \mathrm{i}b_2)\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t}\right] \\ y(t) & = & (a_1 + \mathrm{i}b_1)\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} + (a_2 + \mathrm{i}b_2)\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{array} \right.$$

x et y sont à valeurs complexes, on peut prendre comme solutions les parties réelles de x et de y, soit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 2\mathrm{e}^t\,[(b_1 + b_2)\cos(2t) + (a_2 - a_1)\sin(2t)] \\ y(t) & = & \mathrm{e}^t\,[(a_1 + a_2)\cos(2t) + (b_1 - b_2)\sin(2t)] \end{array} \right. \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$$

Remarque : On aurait pu choisir les parties imaginaires de x et de y, et on trouve les mêmes solutions... les rôles des constantes a_i et b_i sont inversées !

3. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

Le système différentiel s'écrit alors $X'(t) = AX(t)$. On réduit la matrice A :

$\chi_A(X) = \det(XId - A) = \begin{vmatrix} X & -2 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\,(X-2)\,(X+2)$.

Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On montre facilement qu'en appelant V_1, V_2 et V_3 des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 0, 2 et -2, on a :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une famille de trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, la matrice A s'écrit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $X(t)$ dans cette base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

Il existe donc trois constantes réelles k_1, k_2 et k_3 telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(t) & = & k_1\\ \beta(t) & = & k_2\mathrm{e}^{2t}\\ \gamma(t) & = & k_3\mathrm{e}^{-2t}\end{array}\right.$$

D'après les formules de changement de base, on a donc :

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\0&2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t) & = & -2k_1+2k_2\mathrm{e}^{2t}+2k_3\mathrm{e}^{-2t}\\ y(t) & = & 2k_2\mathrm{e}^{2t}-2k_3\mathrm{e}^{-2t}\\ z(t) & = & k_1+k_2\mathrm{e}^{2t}+k_3\mathrm{e}^{-2t}\end{array}\right.$$

4. De façon analogue aux exemples précédents, on est amené à résoudre le système

$$\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\mathrm{Sp}(A)=\{2;1-\mathrm{i};1+\mathrm{i}\}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont respectivement :
$V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $V_3=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$.
La famille $\{V_1;V_2;V_3\}$ est une famille de trois vecteurs associés à des valeurs propres distinctes dont c'est une base de $\mathbb{C}^3$.
Dans cette base, en appelant $\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$ les coordonnées de $X(t)$, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\\beta'(t)\\\gamma'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1-\mathrm{i}&0\\0&0&1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha(t) & = & (a_1+\mathrm{i}b_1)\,\mathrm{e}^{2t}\\ \beta(t) & = & (a_2+\mathrm{i}b_2)\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\\ \gamma(t) & = & (a_3+\mathrm{i}b_3)\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\end{array}\right.\qquad (a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3)\in\mathbb{R}^6$$

D'après les formules de changement de base, on a

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$$

x, y et z sont à valeurs complexes, on peut prendre comme solutions leurs parties réelles, et on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t) & = & a_1\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\left[(b_2-b_3)\cos t+(-a_2-a_3)\sin t\right]\\ y(t) & = & a_1\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\left[(-a_2-a_3)\cos t+(b_3-b_2)\sin t\right]\\ z(t) & = & a_1\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t\left[(a_2+a_3)\cos t+(b_2-b_3)\sin t\right]\end{array}\right.$$

où a_1, a_2, a_3, b_2 et b_3 sont des constantes réelles.

5. On pose $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}$:

Le système différentiel s'écrit alors $X'(t)=AX(t)$. On réduit la matrice A :

$\chi_A(X)=\det(XId-A)=\begin{vmatrix}X-8&1&5\\2&X-3&-1\\-4&1&X+1\end{vmatrix}=(X-4)^2(X-2)$.

Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est au moins trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

On montre facilement que le sous espace propre associé à la valeur propre 2 est engendré par $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, et que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est engendré par $V_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à 3, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

En revanche, on peut la mettre sous forme de Jordan : on sait qu'il existe un vecteur V_3 tel que la famille $\{V_1,V_2,V_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et telle que dans cette base, la matrice A s'écrit $T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}$.

Le vecteur V_3 vérifie $AV_3=V_2+4V_3$, soit $(A-4Id)V_3=V_2$: on résout le système associé à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&-5&1\\-2&-1&1&-1\\4&-1&-5&1\end{array}\right)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&1&-1\\4&-1&-5&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&1&-1\\0&-3&-3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

On a donc $\begin{cases}x&=&1/3+z\\y&=&1/3-z\\z&=&z_0\end{cases}$

En prenant $z_0=0$, on a $V_3=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$ et on montre facilement que la famille $\{V_1,V_2,V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$ les coordonnées de $X(t)$ dans cette base, on a donc :

$$\begin{pmatrix}\alpha'(t)\\\beta'(t)\\\gamma'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&1\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\\\gamma(t)\end{pmatrix}$$

On a donc $\alpha(t)=k_1\mathrm{e}^{2t}$, $\gamma(t)=k_3\mathrm{e}^{4t}$ et β est solution de l'équation différentielle $\beta'(t)=4\beta(t)+k_3\mathrm{e}^{4t}$.

On doit résoudre cette équation différentielle. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\beta(t)=k_2\mathrm{e}^{4t}$ avec $k_2\in\mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :

On pose $f(t)=k_2(t)\mathrm{e}^{4t}$ où k_2 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a alors $f'(t)=k_2'(t)\mathrm{e}^{4t}+4k_2(t)\mathrm{e}^{4t}$.

f est solution de l'équation différentielle sur $_R$ si et seulement si on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, k_2'(t)\mathrm{e}^{4t} + 4k_2(t)\mathrm{e}^{4t} = 4k_2(t)\mathrm{e}^{4t} + k_3\mathrm{e}^{4t} \iff \forall t \in \mathbb{R}; k_2'(t) = k_3$ donc $k_2(t) = k_3 t$ convient, et on a :

$\beta(t) = (k_3 t + k_2)\,\mathrm{e}^{4t} (k_2 \in \mathbb{R})$.
Enfin, d'après les formules de changement de base, on a :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\mathrm{e}^{2t} \\ (k_3 t + k_2)\,\mathrm{e}^{4t} \\ k_3\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & k_1\mathrm{e}^{2t} + \left[k_3\left(t + \dfrac{1}{3}\right) + k_2\right]\mathrm{e}^{4t} \\ y(t) & = & k_1\mathrm{e}^{2t} + \left[k_3\left(-t + \dfrac{1}{3}\right) - k_2\right]\mathrm{e}^{4t} \\ z(t) & = & k_1\mathrm{e}^{2t} + (k_3 t + k_2)\,\mathrm{e}^{4t} \end{array} \right. \qquad (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Il existe donc trois constantes réelles k_1, k_2 et k_3 telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & k_1\mathrm{e}^{2t} \\ \beta'(t) & = & k_2\mathrm{e}^{4t} + \gamma(t) \\ \gamma(t) & = & k_3\mathrm{e}^{4t} \end{array} \right.$$

D'après les formules de changement de base, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & -2k_1 + 2k_2\mathrm{e}^{2t} + 2k_3\mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) & = & 2k_2\mathrm{e}^{2t} - 2k_3\mathrm{e}^{-2t} \\ z(t) & = & k_1 + k_2\mathrm{e}^{2t} + k_3\mathrm{e}^{-2t} \end{array} \right.$$