# Chapitre 9 : Équations différentielles

## 1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Définition 1 : solution d'une équation différentielle**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels avec $a \neq 0$ et $d$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d$ sur l'intervalle $I$ si, pour tout $t \in I$, on a $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t)$
L'équation sans second membre (ou homogène) associée est notée $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$
L'équation caractéristique associée est $ax^2 + bx + c = 0$.

**Exemples 1**
Dans chaque cas, montrer que la fonction $f$ proposée est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

1. $(E) : 3y'' + 9y' - 12y = 0$ avec $f(t) = 2\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-4t}$
2. $(E) : y'' - 4y' + 13y = t^2$ avec $f(t) = \mathrm{e}^{2t}(2\cos 3t - 4\sin 3t) + \dfrac{1}{13}t^2 + \dfrac{8}{169}t + \dfrac{6}{169}$

**Propriété 1 : solution de $E_0$**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ : les solutions à valeurs réelles de l'équation sans second membre sont les fonctions du type :
- $f(t) = K_1\mathrm{e}^{r_1 t} + K_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ où $K_1$ et $K_2$ sont deux nombres réels si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$.
- $f(t) = (K_1 t + K_2)\mathrm{e}^{rt}$ où $K_1$ et $K_2$ sont deux nombres réels si l'équation caractéristique admet une racine réelle double $r$.
- $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t\right)$ où $K_1$ et $K_2$ sont deux nombres réels si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$

**Exemples 2**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(E) : 3y'' + 30y' + 75y = 0$
2. $(E) : y'' - 4y' + 13y = 0$
3. $(E) : y'' + (3 - 2\sqrt{2})y' - 6\sqrt{2}y = 0$
4. $(E) : 3y'' - 6y' + 6y = 0$

**Cas particulier**

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $f(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$ avec $K_1$ et $K_2$ constantes réelles.
L'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $f(t) = K_1 \mathrm{e}^{\omega t} + K_2 \mathrm{e}^{-\omega t}$ avec $K_1$ et $K_2$ constantes réelles.

**Propriété 2 : solutions de $E$**

Soit $f_0$ une solution particulière de $(E)$. Alors les solutions $y$ de l'équation $(E)$ s'écrivent $y = f + f_0$ où $f$ est une solution quelconque de $(E_0)$.

**Propriété 3 : superposition des solutions**

Soit $(E)$ une équation différentielle linéaire du second ordre $(E) : ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.
Soit $f_1$ une solution particulière de l'équation $(E_1) : ay'' + by' + cy = d_1$ et $f_2$ une solution particulière de l'équation $(E_2) : ay'' + by' + cy = d_2$.
Alors $f_1 + f_2$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

**Propriété 4 : solution particulière de $E$**

Soit $(E)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients réels : $(E) : ay'' + by' + cy = k\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $k$ et $\alpha$ réels ou complexes.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $P$ est un polynôme de degré au plus 2.

**Exemples 3**

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $(E) : y'' - y = \mathrm{e}^{-2t}$
2. $(E) : y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{t}$
3. $(E) : y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^{t}$
4. $(E) : y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-t}$
5. $(E) : y'' - 3y' + 2y = \cos t$
6. $(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin t + \cos t$

**Propriété 5 : problème de Cauchy**

Soit $(E)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $(E) : ay'' + by' + cy = d$ où $d$ est une fonctions définies sur $I$. Soit $x_0 \in I$ et $y_0$ et $y_1$ deux nombres complexes.
Alors il existe une unique solution $f$ de l'équation $(E)$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$

**Exemple 4**
Déterminer la solution $f$ de chacune des équations différentielles vérifiant les conditions imposées.

1. $(E) : y'' - y = \mathrm{e}^{-2t}$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$
2. $(E) : y'' - 4y' + 3y = \sin t + \cos t$ avec $f(0) = \dfrac{31}{10}$ et $f'(0) = \dfrac{69}{10}$

## 2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

**Définition 2 : équation différentielle linéaire d'ordre 2**

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 une équation du type :

$$ay" + by' + cy = f \text{ ou notée } a(t)y"(t) + b(t)y('(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

où $a, b, c$ et $f$ sont quatre fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction inconnue étant $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Propriété 6 : solutions de $E$**

Soit $a(t)y"(t) + b(t)y('(t) + c(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 telle que $a(t)$ ne s'annulle pas sur un intervalle $I$.
Alors l'ensemble des solutions sur $I$ de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des fonctions dérivables sur $I$.
La solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est la somme d'une solution particulière de l'équation et de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

**Propriété 7 : problème de Cauchy**

Soit l'équation différentielle $a(t)y"(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$ $(E)$ où $a; b; c$ et $f$ sont des fonctions continues de $I \longrightarrow R$, $I$ un intervalle où, de plus, $a$ ne s'annule pas.
Soit $t_0 \in I$, $\alpha$ , $\beta$ deux réels et les conditions initiales $\begin{cases} y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$.
Alors (E) admet une solution unique de classe $\mathscr{C}^2$ sur I qui vérifie les conditions initiales.

**Remarque**
Il n'existe pas de méthode générale pour obtenir une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 ; On est souvent amené à effectuer un changement d'inconnue ou à la méthode de la variation de la constante pour trouver une deuxième solution à l'équation homogène associée.

**Exemples 5**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(x^2-3)y''-4xy'+6y=0$ (on cherchera des solutions polynomiales).
2. On considère l'équation différentielle $(E)$ : $\quad \left(x^2+1\right)y''-2y=x$.
   - **a.** Déterminer une solution polynômiale $P$ de l'équation homogène associée.
   - **b.** En posant $f(x)=k(x)P(x)$ où $k$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$, montrer que $k$ vérifie l'équation différentielle $\left(x^2+1\right)k''(x)+4xk'(x)=0$.
   - **c.** Résoudre cette équation différentielle et montrer que $k'(x)=\dfrac{\alpha}{\left(x^2+1\right)^2}$.
   - **d.** En intégrant par parties la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$, déterminer $k(x)$ et en déduire que :
   $$f(x)=\frac{\alpha}{2}\left(x+\left(x^2+1\right)\operatorname{Arctan}x\right).$$
   En déduire les solutions de $(E_0)$.
   - **e.** Chercher une solution polynomiale simple de $(E)$ et conclure.
3. **(*)** $\quad x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$ (on cherchera une solution polynomiale).
4. $(1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+(2\mathrm{e}^x+1)y=x\mathrm{e}^x$ en posant $z=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.
5. $y''+y'\tan x-y\cos^2 x=0$ en posant $t=\sin x$
6. **(*)** $\quad x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x)$
   On cherchera des solutions de l'équation homogène sous la forme $y=x^\alpha$ et une solution particulière développable en série entière.

# 3 Système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

**Définition 3 : système différentiel**

On appelle système différentiel linéaire homogène à coefficients constants toute équation différentielle du type

$$X'=AX$$

où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels ou complexes.

**Exemple**

Le système $\begin{cases} x' &= x+4y \\ y' &= x+y \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme

**Propriété 8 : structure de l'ensemble des solutions**

L'espace des solutions d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 à $n$ fonctions inconnues est un espace vectoriel de dimension $n$.

**Exemples 6**

1. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 4x-2y \\ y' & = & x+y \end{array}\right.$
2. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x-4y \\ y' & = & x+y \end{array}\right.$
3. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2y \\ y' & = & x+2z \\ z' & = & y \end{array}\right.$
4. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & -x+2y+z \\ z' & = & x+z \end{array}\right.$
5. **(*)** Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 8x-y-5z \\ y' & = & -2x+3y+z \\ z' & = & 4x-y-z \end{array}\right.$

**Remarque**
Dans le cas où la matrice $A$ est diagonalisable, le signe de la partie réelle des valeurs propres donne des informations sur le comportement asymptotique des solutions :
- si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative alors les solutions tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$
- si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive alors les solutions tendent vers 0 quand t tend vers $-\infty$
- si toutes les valeurs propres ont une partie réelle nulle alors les solutions sont bornées.