Variables aléatoires finies

Définitions - propriétés

Définition de l'espérance (indicateur de position) :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Si $E(X)=0$ on dit que la variable aléatoire est centrée.

Propriétés :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$$

Définitions de la variance (indicateur de dispersion) :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

Si $V(X)=0$ on dit que la variable aléatoire est réduite.

Théorème de Koenig-Huygens : $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Définition de l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Lois usuelles

Loi uniforme $U(n)$:

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

$$p(X=k) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Loi de Bernoulli $B(p)$:

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$p(X=1) = p$$

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p)$$

Loi binomiale $B(n,p)$:

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

Propriété : une loi binomiale de paramètres n et p compte le nombre de succès lorsqu'on réalise n fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dit autrement, si X_1, … X_n sont n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, alors $X_1+\ldots+X_n$ suit une loi $B(n,p)$

Couples de variables aléatoires

Loi du couple (X,Y) (ou loi conjointe) :

$$P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$$

Les lois de X et de Y sont appelées lois marginales

Lois conditionnelles :

$$P_{(Y=y)}(X=x) = \frac{P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)}{P(Y=y)}$$

X et Y sont indépendantes si pour tout x de $X(\Omega)$ et y de $Y(\Omega)$ on a :

$$P\big((X=x)\cap(Y=y)\big) = P(X=x)P(Y=y)$$

Indépendance mutuelle :

$$P\left((X_1=x_1)\cap\ldots\cap(X_n=x_n)\right) = P(X_1=x_1)\ldots P(X_n=x_n)$$

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$ (ce n'est pas une condition nécessaire !!!)

Covariance, coefficient de corrélation linéaire :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Pour tout X et Y, on a $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$

$|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si $Y=aX+b$

Si X et Y sont indépendantes alors :
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
(ce n'est pas une condition nécessaire !!!)