samedi 27 novembre 2021

Devoir surveillé n°3 CCINP

Problème 1

Définitions et notations utilisées :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.

— On note Id l'application identique de E.
Soient f et g deux endomorphismes de E. On note $f \circ g$ la composée de f et de g.

— On convient que $f^0 = Id$, que $f^1 = f$ et, pour un entier $k \geq 2$, on note
$f^k = \underbrace{f \circ \circ \ldots \circ f}_{\text{k fois}}$.

— Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est cyclique si et seulement si il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E.
Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a tel que $\left(a, f(a)\right)$ soit une base de E.
De même, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a)\right)$ soit une base de E.

— Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P.

La première partie du problème est consacré à l'étude d'exemples.

La seconde partie propose l'étude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Elle est totalement indépendante de la première partie.

I. Etude d'exemples I.A. On considère dans cette section **I.A** que $E = \mathbb{R}^2$.
Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice
$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I.A.1. On choisit $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer le vecteur $\alpha(a)$ et montrer que α est cyclique.

I.A.2. Déterminer le vecteur $\alpha^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que
$\alpha^2(a) = xa + y\alpha(a)$.

I.A.3. Déterminer la matrice A' de α dans la base $(a, \alpha(a))$.

I.A.4. Montrer que 2 est une valeur propre de α.

I.A.5. Déterminer un vecteur non nul b de $\mathbb{R}^2$ tel que $(b, \alpha(b))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.
On donnera les coordonnées du vecteur b que l'on aura choisi dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.B. On considère dans cette section **I.B** que $E = \mathbb{R}^3$.
Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I.B.1. Déterminer le polynôme caractéristique de β.

I.B.2. Montrer que β est un automorphisme de $\frac{3}{R}$.

I.B.3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de β.
En déduire que β est diagonalisable, puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.B.4. Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2Id = 0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

I.B.5. En déduire que β n'est pas cyclique.

I.C. On considère dans cette section **I.C.** que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit γ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme P'.
On admettra que γ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de vérifier.
On a donc par exemple $\gamma\left(X^2 - 3X + 1\right) = 2X - 3$.

I.C.1. Déterminer $\gamma\left(X^{n-1}\right)$ et plus généralement $\gamma^k\left(X^{n-1}\right)$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$.

I.C.2. En déduire que γ est cyclique.

II. Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.
On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.
On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.
On a donc par exemple $\delta\left(X^2 - 3X + 1\right) = \left((X+1)^2 - 3(X+1) + 1\right) - \left(X^2 - 3X + 1\right)$.

On rappelle également le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans avoir à le démontrer :
Soit $(Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1})$ une famille de polynômes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, $\deg(Q_i) = i$.
Alors la famille $(Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.A. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.

II.A.1. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.
En utilisant la formule du binôme, montrer que le polynôme $\delta\left(X^k\right)$ est exactement de degré $k-1$.

II.A.2. Soit maintenant P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1.
E, utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.

II.A.3. Montrer enfin que δ est cyclique en considérant la famille $\left(X^{n-1}, \delta\left(X^{n-1}\right), \delta^2\left(X^{n-1}\right), ..., \delta^{n-1}\left(X^{n-1}\right)\right)$.

II.B. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.

II.B.1. En utilisant le résultat de la question **II.A.2.**, montrer que le noyau de l'endomorphisme δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.

II.B.2. Montre que l'image de l'endomorphisme δ est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.B.3. En utilisant le théorème du rang, montrer finalement que l'image de l'endomorphisme δ coïncide avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.C. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique.
On définit les polynômes $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :
$P_0(X) = 1$, $P_1(X) = \dfrac{1}{1!}X$, $P_2(X) = \dfrac{1}{2!}X(X-1)$, ... et
$P_{n-1}(X) = \dfrac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)...(X-n+2)$.
On a donc, pour tout entier j compris entre 1 et $n-1$,
$P_j(X) = \dfrac{1}{j!}X(X-1)(X-2)...(X-j+1) = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{k=0}^{j-1}(X-k)$.

II.C.1. Montrer que $(P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.C.2. Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$.
Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
On pourra remarquer que 0 est racine de P_1, P_2 et P_3 et que 1 est racine de P_2 et P_3.

II.C.3. Soient i et j deux entiers naturels tels que $i \neq 0$ et $1 \leq j \leq n-1$.
Montrer que $\delta\left(P_j\right) = P_{j-1}$, puis déterminer $\delta^i\left(P_j\right)$ en distinguant les cas $i \leq j$ et $i > j$.

II.C.4. En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Problème 2

Le problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en le précisant sur la copie.
Etant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle :

$$16\left(x^2-x\right)y''+(16x-8)y'-\mu y=0 \qquad \left(E_\mu\right)$$

dont on cherche les solutions y sur l'intervalle $]0,1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu=0$

Dans cette partie, on suppose $\mu=0$, on cherche donc à résoudre sur $]0,1[$ l'équation

$$16\left(x^2-x\right)y''+(16x-8)y'=0 \qquad (E_0)$$

1. Soit $f: x\mapsto \text{Arcsin}(2x-1)$. Montrer que f est définie et continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et que :
$$\forall x\in]0,1[, f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$
2. Montrer que toute fonction constante sur $]0,1[$ est solution de (E_0).
3. Montrer que $\forall x\in]0,1[$, on a $\dfrac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)}=\dfrac{1/2}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}$.
4. On pose $z=y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :
$$z'+\left(\frac{1/2}{x}+\frac{1/2}{x-1}\right)z=0 \qquad \left(E^*\right)$$
5. Résoudre (E^*) sur $]0,1[$.
6. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0,1[$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu\neq 0$

On se place dans le cas où $\mu\neq 0$.
Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x\in]-R,R[, y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

1. Justifier que y est de classe C^∞ sur un ensemble que vous préciserez.
2. Montrer que y est solution de $\left(E_\mu\right)$ si et seulement si :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(16n^2-\mu\right)a_n-8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n=0$$
3. Montrer que si y est solution de $\left(E_\mu\right)$ alors on a, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!}a_0$.
4. Si $a_0=0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.
5. Si $a_0\neq 0$ et $\mu=16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynômiale et préciser son degré.
6. Si $a_0\neq 0$ et $\mu\neq 16p^2$ pour tout entier p, préciser le rayon de convergence de y.

Partie III - Etude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.
Soit φ la fonction définie sur $]-R, R[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **3.** de la partie précédente et R le rayon de convergence obtenu à la question **6.** de cette même partie.

1. A partir de la question **3.** de la partie précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!}$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{-(4n)!}{4^{2n} \times [(2n)!]^2 \times (4n-1)}$
4. En admettant la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$.
5. Rappeler le rayon de convergence de φ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.
6. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non nulle f sur $]0,1[$.