

TD Chapitre 10 : Fonctions vectorielles - Courbes paramétrées

Exercice 1

On a $\vec{F} + \vec{G} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$, $3\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ 3t \end{pmatrix}$, $\vec{F} \cdot \vec{G} = \cos^2 t - \sin^2 t - 2t^2$

$$\|\vec{F} + \vec{G}\| = \sqrt{4 \cos^2 t + t^2} \text{ et } \vec{F} \wedge \vec{G} = \begin{pmatrix} -t \sin t \\ 3t \cos t \\ -2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. On a $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} t e^{2t} = 0$ donc la limite de $\vec{F}$ en 0 existe et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}.$$

2. Les trois fonctions coordonnées sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ donc $\vec{F}$ également, et pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\vec{F}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ t \cos t - \sin t \\ \frac{t^2}{(2t+1)e^{2t}} \end{pmatrix}$$

3. En posant $\vec{F}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la fonction $\vec{F}$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1.

4. On étudie la dérivabilité en 0 de la deuxième coordonnée (la première et la troisième ne posent aucun problème en 0).

On cherche donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2}.$

On a $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ donc $\frac{\sin t - t}{t^2} = -\frac{t}{6} + o(t)$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t} = 0.$

Ainsi la fonction $\vec{F}$ est dérivable en 0, avec $\vec{F}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ La fonction vectorielle $\vec{F}$

est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

5. En posant P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u, v et w dans la base canonique, X les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base canonique et Y les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base (u, v, w) on a $X = P Y'$ ou encore $Y = P^{-1} X$

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on montre facilement que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on calcule facilement $Y(t)$

Exercice 3

— **Limite de $x(t)$:**

$e^{-t} = o(e^t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$. En outre, $t \mapsto \cos t$ est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

— De même, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

— De même, $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{e^t} = 1$.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Les fonctions coordonnées sont clairement dérivables en t_0 et

$$\vec{F}'(t_0) = -\sin t_0 \vec{i} + \cos t_0 \vec{j}.$$

$$\text{On a donc } \|\vec{F}'(t_0)\| = \sqrt{\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0} = 1 \text{ et}$$

$$\vec{F}(t_0) \cdot \vec{F}'(t_0) = -\cos t_0 \sin t_0 + \cos t_0 \sin t_0 = 0.$$

Donc $\vec{F}'(t_0)$ est un vecteur de norme 1, orthogonal à $\vec{F}(t_0)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on montre facilement par récurrence les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \cos^{(4n)}(t) = \cos t & ; & \cos^{(4n+1)}(t) = -\sin t & ; & \cos^{(4n+2)}(t) = -\cos t & ; & \cos^{(4n+3)}(t) = \sin t \\ \sin^{(4n)}(t) = \sin t & ; & \sin^{(4n+1)}(t) = \cos t & ; & \sin^{(4n+2)}(t) = -\sin t & ; & \sin^{(4n+3)}(t) = -\cos t \end{cases}$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(4n)}(t) & = & \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} \\ \vec{F}^{(4n+1)}(t) & = & -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} \\ \vec{F}^{(4n+2)}(t) & = & -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} \\ \vec{F}^{(4n+3)}(t) & = & \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} \end{cases}$$

Exercice 5

— Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a $(\vec{F} + \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t) = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \vec{i} + \left(-2t - \frac{2}{t^3}\right) \vec{j}$.

— D'après la propriété 2 du cours, on a, pour tout réel non nul t :

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t) + \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} = 0$$

Remarque : on peut facilement montrer que pour tout réel t non nul, ce produit scalaire est constant (égal à 0), ce qui permet de retrouver le résultat.

— D'après la propriété 2 du cours, on a, pour tout réel non nul t :

$$\|\vec{F}\|'(t) = \frac{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)}{\|\vec{F}(t)\|} = \frac{t - 2t^3}{\sqrt{t^2 + t^4}}$$

Exercice 6

Soit $t \in \mathbb{R}^*$:

— $k(t) \vec{F}(t) = \vec{i} - \frac{1}{t} \vec{j}$ donc $(k \vec{F})'(t) = \frac{1}{t^2} \vec{j}$.

— $\vec{F} \circ k(t) = \frac{1}{t^4} \vec{i} - \frac{1}{t^6} \vec{j}$ donc $(\vec{F} \circ k)'(t) = -\frac{4}{t^5} \vec{i} + \frac{6}{t^7} \vec{j}$.

Exercice 7

On cherche d'abord l'ensemble de définition de $\vec{F} : t \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} t > -1 \\ t \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$

$\vec{F}$ est donc définie au voisinage de 0. On cherche les développements limités en 0 à l'ordre 3 de chacune des fonctions coordonnées :

$$- x(t) = \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t}\right) = \ln(1+t^2) - \ln(1+t)$$

$$\text{Donc } x(t) \underset{0}{=} t^2 + o(t^3) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) \underset{0}{=} -t + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

$$- y(t) = \frac{1}{\cos t} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)} \underset{0}{=} 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \text{ puisque } \frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + o(u).$$

$$- \text{On a } \frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2) \text{ donc } \frac{1}{1+t^2} \underset{0}{=} 1 - t^2 + o(t^2).$$

$$\text{On a donc } z(t) = \text{Arctan } t \underset{0}{=} \text{Arctan } 0 + t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

$$\text{Finalement, on a } \vec{F}(t) \underset{0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \vec{o}(t^3)$$

Exercice 8

1. Soit $t \in I$: on a $g(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)$ donc $g'(t) = 2\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t)$.
2. Supposons que le norme du vecteur $\vec{F}(t)$ soit constante : on a alors, pour tout réel t de I , $\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) = 0$ donc le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position en tout point.

Remarque : C'est le cas pour le mouvement d'un point mobile sur un cercle centré en l'origine du repère : en tout réel t le vecteur position a une norme constante (penser au rayon du cercle) et donc le vecteur vitesse est orthogonal à ce vecteur position.

Exercice 9

1. On suppose que en tout réel t les vecteurs $\vec{f}(t)$ et $\vec{g}(t)$ sont colinéaires : il existe donc une fonction réelle k telle que en tout réel t , on ait $\vec{f}(t) = k(t)\vec{g}(t)$.
On a alors $\vec{f}'(t) = k'(t)\vec{g}(t) + k(t)\vec{g}'(t)$, et on comprend que les vecteurs $\vec{f}'(t)$ et $\vec{g}'(t)$ peuvent ne pas être colinéaires.

Contre-exemple :

On pose $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$: on a bien $\vec{f}(t) = k(t)\vec{g}(t)$ avec $k(t) = t$.

En outre, on a $\vec{g}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ qui sont clairement non colinéaires!

2. On suppose que pour tout $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\vec{f}'(t)$ et $\vec{g}'(t)$ sont colinéaires. Le contre-exemple $\vec{g}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ montre qu'il n'existe pas $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{f}'(t) - \vec{c}$ et $\vec{g}'(t)$ sont colinéaires.

Exercice 10

1. Clairement, on a $\vec{f}(0) = \vec{f}(1) = \vec{0}$.
2. C'est évident, et on a $\vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} 2t - 3t^2 \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$.
3. On a $\vec{f}'(t_0) = \vec{0} \iff \begin{cases} t_0 = 0 \text{ ou } t_0 = 2/3 \\ t_0 = 1/2 \end{cases}$ donc il n'existe pas de $t_0 \in]0; 1[$ tel que $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$.
4. On en déduit que le théorème de Rolle est faux pour les fonctions vectorielles.

Exercice 11**Réduction du domaine d'étude**

Les deux fonctions x et y sont évidemment $2 - \pi$ périodiques : on peut les étudier sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$.

On remarque que $x(t + \pi) = \sin(t + \pi) = -\sin t = -x(t)$ et

$y(t + \pi) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t) = y(t)$: on peut donc étudier x et y sur un intervalle de longueur π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter la courbe par symétrie axiale par rapport à (Oy) .

Enfin, x et y sont des fonctions impaires donc on peut les étudier seulement sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter la courbe par symétrie centrale par rapport à l'origine.

Tableau des variations simultanées de x et y

Soit $t \in I$: on a $x'(t) = \cos t > 0$ sur I et $y'(t) = 2\cos 2t > 0 \iff t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. On en déduit le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$x(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y'(t)$	2	0	-2
$y(t)$	0	1	0

Etude des tangentes particulières

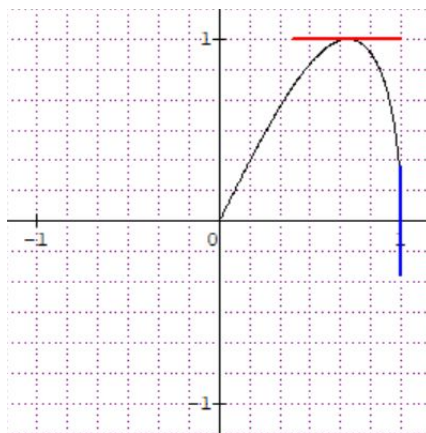
On a une tangente horizontale au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$ et une tangente verticale au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.

Recherche de points multiples

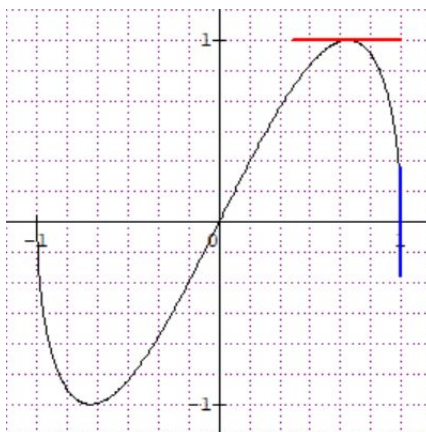
x étant strictement croissante sur I , il est inutile de rechercher des points multiples!

Tracé de la courbe

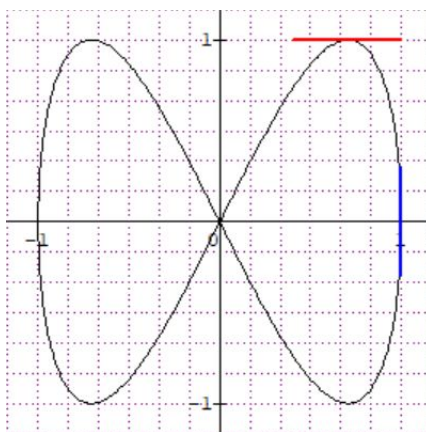
On commence par tracer la courbe pour $t \in I$:



Puis on complète par symétrie centrale par rapport à l'origine :



Et enfin par symétrie axiale d'axe (Oy) :

**Exercice 12****Réduction du domaine d'étude**

Soit $t \in \mathbb{R}$: on a $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ donc en construisant la courbe pour t appartenant à un intervalle de longueur 2π , on la complète par translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$: on peut par exemple l'étudier sur $[-\pi; \pi]$.

En outre, on $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc on peut représenter la courbe pour $t \in [0, \pi] = I$ et la compléter par symétrie axiale d'axe (Oy) .

Tableau des variations simultanées de x et y

Soit $t \in I$: on a $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ sur I et $y'(t) = \sin t \geq 0$ sur I . On en déduit le tableau :

$\underline{t}$	0		$\underline{\pi}$	
$\underline{x'}(t)$	0	+	2	
$\underline{x}(t)$	0			$\underline{\pi}$
$\underline{y'}(t)$	0	+	0	
$\underline{y}(t)$	0			2

Etude des tangentes particulières

On a un point singulier de paramètre 0 et une tangente horizontale au point de paramètre π .

On calcule $x''(t) = \sin t$ et $y''(t) = \cos t$ donc on en déduit qu'au point de paramètre 0, l

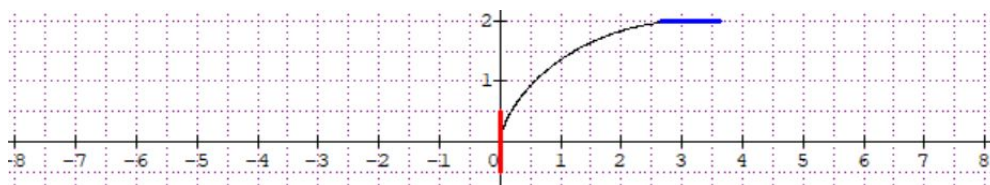
vecteur $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente, qui est donc verticale.

Recherche de points multiples

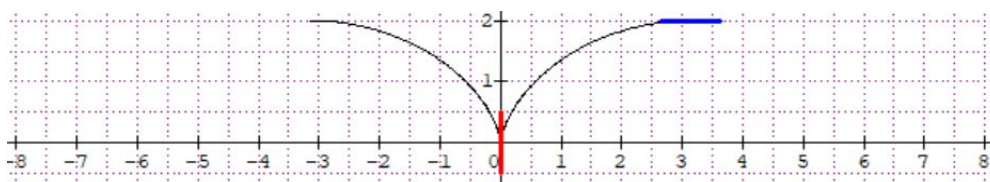
x et y étant strictement croissantes sur I , il est inutile de rechercher des points multiples!

Tracé de la courbe

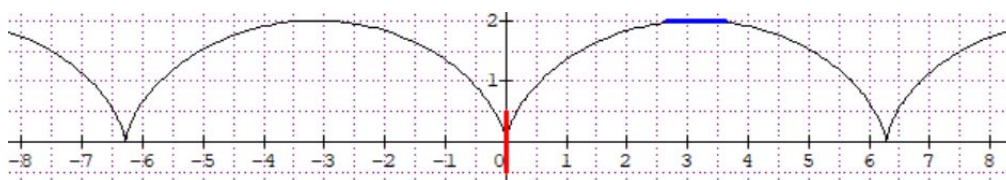
On commence par tracer la courbe pour $t \in I$:



Puis on complète par symétrie centrale par rapport à l'origine :



Et enfin par translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$:



Exercice 13**Réduction du domaine d'étude**

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. On montre facilement que x est paire et y impaire donc on représente la courbe pour $t \in \mathcal{D} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ puis on complète par symétrie axiale par rapport à (Ox) .

Tableau des variations simultanées de x et y

Pour $t \in \mathcal{D}$, on a $x'(t) = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}$ et $y'(t) = -\frac{4(t^2+1)}{(t^2-1)^2}$

$x(t) \sim \frac{t^2}{+\infty}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ et $y(t) \sim \frac{4t}{+\infty}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

En outre, $\lim_{t \rightarrow 1^-} t^2 - 1 = 0^-$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} t^2 - 1 = 0^+$ donc comme $\lim_{t \rightarrow 1} t^2 + 1 = 2$, on a $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = +\infty$.

On montre de même que $\lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} y(t) = +\infty$.

On en déduit le tableau suivant :

t	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	0	—	—
$x(t)$	-1	$-\infty$	1
$y'(t)$	-4	—	—
$y(t)$	0	$-\infty$	0

Etude des tangentes particulières

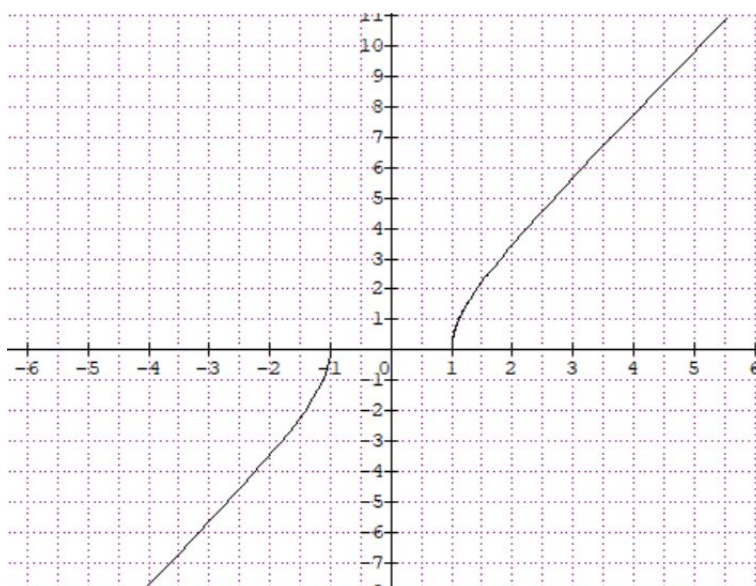
On a une tangente verticale au point de paramètre 0.

Recherche de points multiples

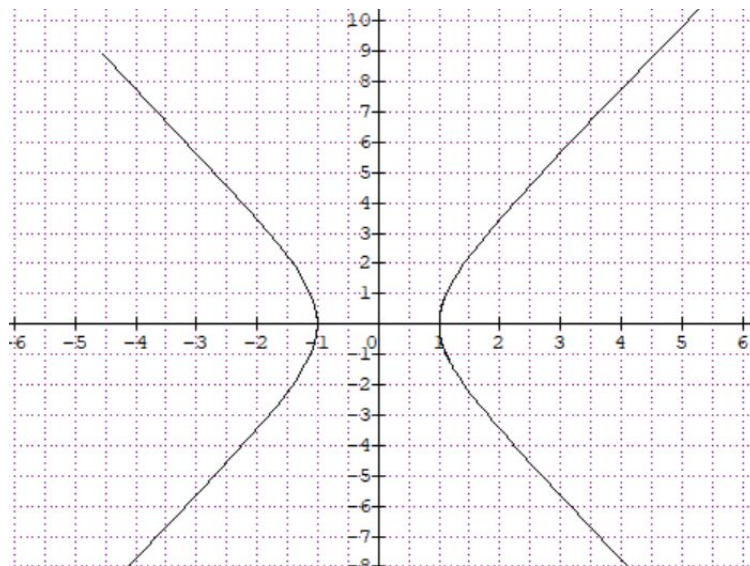
x et y étant strictement décroissantes sur $\mathcal{D}$, il est inutile de rechercher des points multiples!

Tracé de la courbe

On commence par tracer la courbe pour $t \in \mathcal{D}$:



Puis on complète par symétrie axiale d'axe (Ox) :



Exercice 14

1. Il est évident que $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\text{On a } x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\ln t}{t} = -y(t) \text{ et } y\left(\frac{1}{t}\right) = t \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -t \ln t = -x(t).$$

Donc $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

La fonction inverse envoie l'intervalle $]0, 1]$ dans l'intervalle $[1, +\infty[$ donc on peut représenter la courbe pour $t \in]0, 1]$ et la compléter par symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

3. **Tableau des variations simultanées de x et y**

Pour $t \in I$, on a $x'(t) = \ln t + 1$ donc $x'(t) > 0 \iff t > e^{-1}$ et $y'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} > 0$ sur I .

D'après les théorèmes de croissances comparées, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 0$ et par quotient,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty.$$

On en déduit le tableau suivant :

t	0	e^{-1}	1
$x'(t)$		— 0 +	1
$x(t)$	0		0
$y'(t)$		+ $2e^2$ +	1
$y(t)$	$-\infty$	$-e$	0

Etude des tangentes particulières

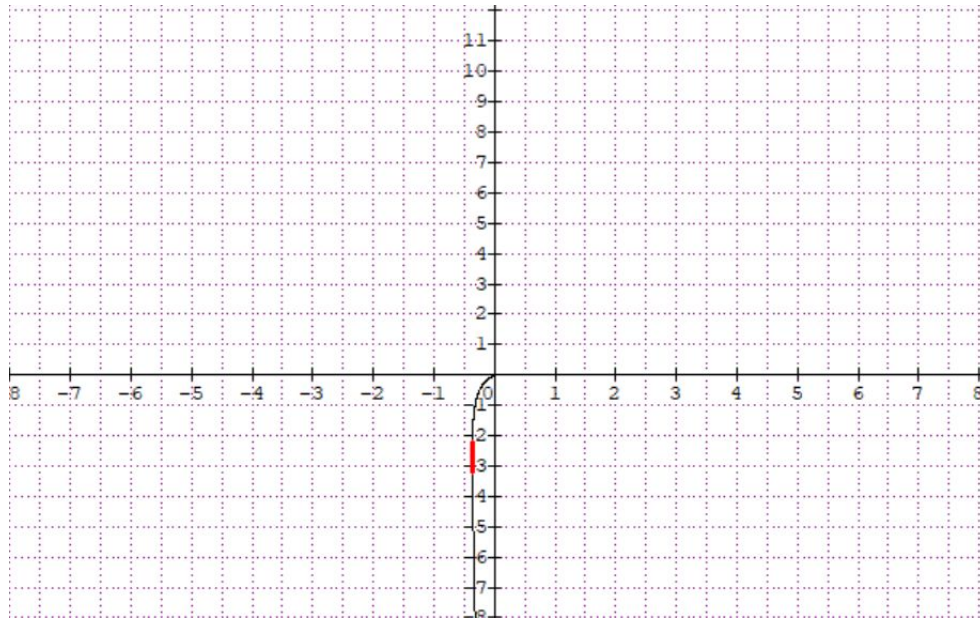
On a une tangente verticale au point de paramètre e^{-1} .

Recherche de points multiples

y étant strictement décroissantes sur I , il est inutile de rechercher des points multiples!

Tracé de la courbe

On commence par tracer la courbe pour $t \in I$:



Puis on complète par symétrie axiale d'axe $y = -x$:

