

TD Chapitre 10 : Fonctions vectorielles - Courbes paramétrées

Exercice 1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux fonctions vectorielles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\vec{F}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{G}(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} - 2t \vec{k}.$$

Déterminer les fonctions $\vec{F} + \vec{G}$, $3\vec{F}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$, $\|\vec{F} + \vec{G}\|$, $\vec{F} \wedge \vec{G}$.

Exercice 2

Soit $\vec{F} : t \mapsto \left(\cos t, \frac{\sin t}{t}, te^{2t} \right)$.

1. Montrer que $\vec{F}$ admet une limite en 0.
2. Montrer que $\vec{F}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\vec{F}'$.
3. Montrer que la fonction vectorielle $\vec{F}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On notera à nouveau $\vec{F}$ le prolongement.
4. La fonction vectorielle $\vec{F}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
5. Exprimer les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base $(\vec{u}(1, 1, 0), \vec{v}(0, 1, 1), \vec{w}(1, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction vectorielle

$$\vec{F}(t) = \left(\frac{\cos t}{e^t - e^{-t}}, \frac{\sin t}{e^t - e^{-t}}, \frac{e^t}{e^t - e^{-t}} \right)$$

.

Exercice 4

Soient t_0 un réel et $\vec{F}$ une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{F}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}.$$

1. Démontrer que $\vec{F}'(t_0)$ est un vecteur de norme 1, orthogonal à $\vec{F}(t_0)$.
2. Déterminer les dérivées successives de $\vec{F}$.

Exercice 5

Soient $\vec{F}(t) = t \vec{i} - t^2 \vec{j}$ et $\vec{G}(t) = \frac{1}{t} \vec{i} + \frac{1}{t^2} \vec{j}$.

Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées des fonctions $\vec{F} + \vec{G}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$, $\|\vec{F}\|$.

Exercice 6

Soient $\vec{F}(t) = \frac{1}{t^2} \vec{i} - \frac{1}{t^3} \vec{j}$ et $k(t) = t^2$.

Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ les dérivées des fonctions $k\vec{F}$ et $\vec{F} \circ k$.

Exercice 7

Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 3 de la fonction $\vec{F}$ définie par

$$\vec{F}(t) = \left(\ln \left(\frac{1+t^2}{1+t} \right); \frac{1}{\cos t}, \arctan t \right).$$

Exercice 8

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\vec{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable sur I .
On note, pour $t \in I$, $g(t) = \|\vec{F}(t)\|^2$.

1. Montrer que $g'(t) = 2\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t)$.
2. Si le module du vecteur $\vec{F}(t)$ est constant, que peut-on dire du vecteur $\vec{F}'(t)$.

Exercice 9

Soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}_1$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que pour tout $t \in I$, $\vec{f}(t)$ et $\vec{g}(t)$ sont colinéaires. Est-ce que $\vec{f}'(t)$ et $\vec{g}'(t)$ sont colinéaires?
2. On suppose que pour tout $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\vec{f}'(t)$ et $\vec{g}'(t)$ sont colinéaires. Existe-t-il $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{f}(t) - \vec{c}$ et $\vec{g}(t)$ sont colinéaires?

Exercice 10

Soit $\vec{f} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{f}(t) = (t^2(1-t), t(1-t))$$

1. Montrer que $\vec{f}(0) = \vec{f}(1)$.
2. Montrer que $\vec{f}$ est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de $t_0 \in]0; 1[$ tel que $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$.
4. Que peut-on en déduire pour les fonctions vectorielles?

Exercice 11

Étudier et représenter l'arc paramétré : $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

Exercice 12

Étudier et représenter l'arc paramétré : $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

Exercice 13

Étudier et représenter l'arc paramétré : $\begin{cases} x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \\ y = \frac{4t}{t^2 - 1} \end{cases}$

Exercice 14

Soit Γ l'arc paramétré par : $\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ
2. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comparer $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire le domaine d'étude de Γ
3. Acheter l'étude et représenter Γ