Chapitre 10 : Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Dans toute la suite, on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ou l'espace $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et celui de l'espace est noté $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Exemples d'introduction

1. On considère un point M de coordonnées (x, y) dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M quand le paramètre t varie dans l'intervalle donné.

a. $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t+1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x(t) = -3t+1 \\ y(t) = 2t-5 \end{cases}$ avec $t \in [0;5]$

c. $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^{+*}$

d. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ avec $t \in [0;2\pi]$

e. $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

f. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^+$

g. $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \\ y(t) = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

h. $\begin{cases} x(t) = 1+\cos t \\ y(t) = 1+\sin 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Représenter à l'aide d'un logiciel les ensembles des points M de coordonnées (x, y) vérifiant :

a. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3-4t}{1+2t^2} \\ y(t) = \dfrac{3t-4t^2}{1+2t^2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c. $\begin{cases} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$

d. $\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1-\cos t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1 Fonctions vectorielles

Définition 1 : fonction vectorielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\overrightarrow{f}$ est une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ s' il existe deux fonctions x et y définies sur I telles que, pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$
Les fonctions x et y sont appelées fonctions coordonnées (ou composantes) de $\overrightarrow{f}$.

Remarque
On généralise aisément à $\mathbb{R}^3$ en rajoutant une troisième fonction coordonnée z.

Définition 2 : limite

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \overrightarrow{\mathscr{P}}$ une fonction vectorielle de coordonnées x et y. Soit $t_0 \in I$.
On dit que $\overrightarrow{f}$ tend vers un vecteur $\overrightarrow{v}$ lorsque t tend vers t_0 et on note $\lim\limits_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{v}$ si $\lim\limits_{t\to t_0} \|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{v}\| = 0$

Propriété 1 : limite des fonctions coordonnées

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \overrightarrow{\mathscr{P}}$ une fonction vectorielle de coordonnées x et y.
Soit $t_0 \in I$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur de coordonnées (x_0, y_0).

$$\text{Alors } \lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0 \end{array}\right.$$

Exemples 1
Dans chaque cas, déterminer la limite $\overrightarrow{v}$ en 0 de la fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$ proposée.

1. $\overrightarrow{f}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$
2. $\overrightarrow{f}(t) = \dfrac{e^t}{t+1}\overrightarrow{i} + \dfrac{e^{-2t-1}}{t-1}\overrightarrow{j}$
3. $\overrightarrow{f}(t) = \dfrac{\sin t}{t}\overrightarrow{i} + \dfrac{\cos t - 1}{t}\overrightarrow{j}$
4. $\overrightarrow{f}(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}\overrightarrow{i} + t\ln t\,\overrightarrow{j}$
5. $\overrightarrow{f}(t) = t\ln t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{\tan(2t)}{t}\overrightarrow{j}$

Définition 3 : continuité et dérivabilité

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \overrightarrow{\mathscr{P}}$ une fonction vectorielle de coordonnées x et y et soit $t_0 \in I$.
$\overrightarrow{f}$ est continue en t_0 si x et y sont continues en t_0.
$\overrightarrow{f}$ est dérivable en t_0 si x et y sont dérivables en t_0.
$\overrightarrow{f}$ est dite continue (resp dérivable) sur I si $\overrightarrow{f}$ est continue (resp dérivable) en tout réel t_0 de I.
On note alors $\overrightarrow{f}'(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j}$
On peut aussi noter : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Exemples 2
Dans chaque cas, montrer que $\overrightarrow{f}$ est dérivable sur I et calculer $\overrightarrow{f}'(t)$

1. $\overrightarrow{f}(t) = \tan t\,\overrightarrow{i} + te^{t^2}\overrightarrow{j}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
2. $\overrightarrow{f}(t) = (t\ln t - t)\overrightarrow{i} + \ln(1+t^2)\overrightarrow{j}$ et $I =]0, +\infty[$
3. $\overrightarrow{f}(t) = \arcsin(t)\overrightarrow{i} + \arccos(2t)\overrightarrow{j}$ et $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$
4. $\overrightarrow{f}(t) = (\ln t)^t\,\overrightarrow{i} + (\cos t)^{\sin t}\,\overrightarrow{j}$ et $I = \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$
5. $\overrightarrow{f}(t) = \sin(\ln t)\overrightarrow{i} + \cos(\ln t)\overrightarrow{j}$ et $I =]0, +\infty[$

Propriété 2 : dérivées dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ deux fonction vectorielles de classe C^1 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Alors les fonctions produit scalaire : $t \mapsto \left(\overrightarrow{f}\,|\,\overrightarrow{g}\right)$ et déterminant : $t \mapsto \det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right)$ ou
La fonction norme $t \mapsto \| f(t) \|$ est dérivable si $f(t)$ est non nul.
De plus :

1. $\left(\overrightarrow{f}\,|\,\overrightarrow{g}\right)'(t) = \left(\overrightarrow{f}'(t)|\overrightarrow{g}(t)\right) + \left(\overrightarrow{f}(t)|\overrightarrow{g}'(t)\right)$ *(valable aussi pour $\mathbb{R}^3$)*
2. Si $f(t)$ est non nul, alors $\| f \|'(t) = \dfrac{\left(f(t)|f'(t)\right)}{\| f(t) \|}$. *(valable aussi pour $\mathbb{R}^3$)*
3. $\left(\det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}\right)\right)'(t) = \det\left(\overrightarrow{f}'(t), \overrightarrow{g}(t)\right) + \det\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}'(t)\right)$.

Propriété 3 : dérivée dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ trois fonction vectorielles de classe C^1 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Alors la fonction déterminant $t \mapsto \det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}\right)$ sont dérivables sur I et la fonction produit vectoriel : $t \mapsto \left(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}\right)$ sont dérivables sur I et on a :

$$(f \wedge g)'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

$$\left(\det\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}\right)\right)'(t) = \det\left(\overrightarrow{f}'(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h(t)}\right) + \det\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}'(t), \overrightarrow{h(t)}\right) + \det\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h'(t)}\right).$$

Exemples 3

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(t) = e^{t^2}\overrightarrow{i} + \frac{t}{1+t^2}\overrightarrow{j} \qquad g(t) = (t^2-1)\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}.$$

   Calculer la dérivée des fonctions produit scalaire $(f|g)$, norme de $\| f \|$, déterminant $\det(f,g)$.

2. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2 \\ -t^3+t \end{pmatrix} g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2+1 \\ 2t \end{pmatrix} h(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Calculer la dérivée des fonctions produit scalaire $(f|g)$, norme de $\| h \|$, et déterminant $\det(f,g,h)$.

Propriété 4 : formule de Taylor - Young

Soit f une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}_k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et a un élément de I.
Alors il existe une fonction ϵ définie sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + (x-a)^k \epsilon(x-a) \text{ avec } \lim_{u \to 0} \epsilon(u) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

autrement dit

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{(x-a)^k}{k!}\epsilon(x-a).$$

Propriété 5 : développement limité

Soit f une fonction vectorielle définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
f admet un développement limité en 0 si et seulement si les fonctions coordonnées en admettent un.

Exemples 4
Déterminer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction vectorielle f dans chacun des cas suivants :

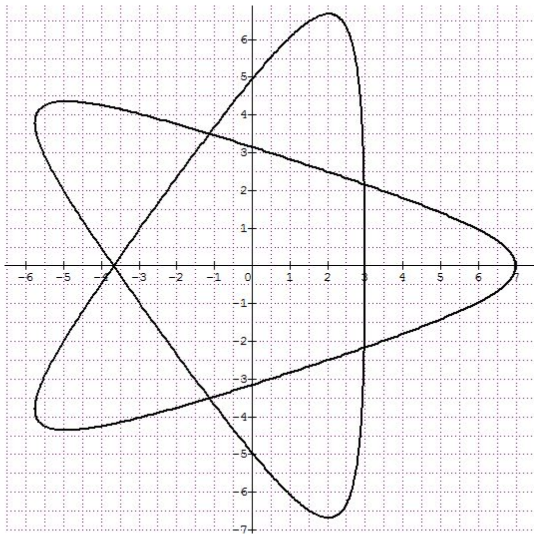
1. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(t) = \left(e^t - 1, \dfrac{1}{t+1}, \ln(1-t^2)\right) \qquad n = 5$
2. $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(t) = \left(\dfrac{1}{(1-t)^2}, \dfrac{\arctan(t)}{t}\right) \qquad n = 6$
3. $h : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h(t) = \left(\dfrac{1-\cos t}{\sin t}, \dfrac{\sin^2 t}{t}\right) \qquad n = 3.$

2 Arcs et courbes paramétrés

Définition 4 : arc paramétré du plan

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle arc paramétré du plan tout couple $\Gamma = (I, M)$ où $M : I \to \mathscr{P}$ est une application définie qui à tout réel $t \in I$ associe un point $M(t)$ du plan.
On note $\overrightarrow{f}$ la fonction vectorielle associée, définie par $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$

Interprétation cinématique
t s'interprète comme un paramètre temporel. $M(t)$ représente alors la position du point mobile M à l'instant t. L'ensemble des positions prises par M décrit une courbe appelée trajectoire, tandis que l'arc correspond à un mouvement sur cette trajectoire.
A cette courbe (appelée hypotrochoïde) correspond une infinité d'arcs paramétrés.



On ne sait pas, par exemple, de quelle position le point est parti à $t = 0$, dans quel sens la courbe a t-elle été parcourue, ou bien combien de fois elle l'a été.

Définition 5 : vecteurs vitesse et accélération

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe C^k.

— Si $k \geq 1$ alors $f'(t)$ est appelé vecteur vitesse au point $M(t)$

— Si $k \geq 2$ alors $f''(t)$ est appelé vecteur accélération au point $M(t)$

Définition 6 : point simple, point multiple

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc paramétré du plan et soit M un point de la courbe associée $\mathscr{C}$.
Un point M de $\mathscr{C}$ est simple si il existe un unique réel t de I tel que $M = M(t)$.
Dans le cas contraire, le point M est dit multiple.
L'arc Γ est simple si tous les points de $\mathscr{C}$ sont simples.

Un arc paramétré dont la courbe est l'hypotrochoïde n'est pas simple puisqu'il possède au moins 5 points multiples.

Exemples 5

Dans chaque cas, dire si l'arc paramétré possède des points doubles, et donner leurs coordonnées.

1. $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + 1 \\ y(t) = -t\mathrm{e}^t + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

3. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2 - t} \\ y(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1} \end{cases} \quad (t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[)$

Définition 7 : point régulier

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe C^k avec $k \geq 1$.
Un point $M_0 = M(t_0)$ est un point régulier de Γ si $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Propriété 6 : tangente en un point M_0

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe C^k avec $k \geq 1$.
Si en $M_0 = M(t_0)$ point de Γ, il existe une entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et tel que $f^{(k)}(t_0) = 0$ pour $k < p$, alors le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en m_0 à Γ.
En particulier, si $M_0 = M(t_0)$ est un point régulier de Γ alors Γ admet une tangente au point M_0, dirigée par le vecteur $f'(t_0)$

Exemples 6
Déterminer les points non réguliers des arcs suivants, et étudier la tangente en ces points.

1. $\begin{cases} x = e^{t-1} - t \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$

Propriété 7 : longueur d'un arc

Soient $(t_1, t_2) \in I^2$ avec $t_1 < t_2$
La longueur de l'arc $M_1(t)M_2(t)$ de Γ, décrit par le point $M(t)$ lorsque t décrit $[t_1, t_2]$ est le réel :

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

En particulier pour une courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \in [a, b]$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Exemples 7
Calculer les longueurs des arcs suivants :

1. Calculer la longueur d'un cercle de rayon R.
2. Calculer la longueur de l'astroïde de paramétrage :
$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ pour $t \in [0; 2\pi]$
3. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde de paramétrage :
$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ pour $t \in [0; 2\pi]$

Plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes

1. Intervalle de définition, réduction de l'intervalle d'étude par parité, périodicité...
2. Tableau des variations simultanées de x et de y
3. Étude des tangentes particulières
4. Recherche de points multiples
5. Tracé de la courbe représentative

Exemples 8

1. Étudier l'arc paramétré défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\[2ex] y = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{array}\right.$$

2. Étudier l'arc paramétré défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$$

3. Étudier l'arc paramétré défini par : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\[2ex] y(t) = 2t + t^2 \end{array}\right.$