Chapitre 10 : CORRECTION DES EXEMPLES

Exemples 1

1. $\lim\limits_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{i}$ (évident).
2. On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t}{t+1} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{-2t-1}}{t-1} = -e$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{i} - e\overrightarrow{j}$
3. On sait que $\sin t \underset{0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.
   En outre, on a $\cos t - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t - 1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{t}{2} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{i}$.
4. On sait que $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$.
   En outre, les théorèmes de croissances comparées nous permettent d'affirmer que $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$.
   Donc $\lim\limits_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{i}$.
5. De même que précédemment, $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$.
   En outre, on sait que $\tan u \underset{0}{\sim} u$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{2} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{t} = 2$.
   Finalement, $\lim\limits_{t\to 0} \overrightarrow{f}(t) = 2\overrightarrow{j}$.

Exemples 2

1. Les fonctions x et y sont dérivables sur I d'après les théorèmes usuels et on a :
   $\overrightarrow{f}'(t) = \left(1+\tan^2 t\right)\overrightarrow{i} + e^{t^2}\left(2t^2+1\right)\overrightarrow{j}$.
2. Les fonctions x et y sont dérivables sur I d'après les théorèmes usuels et on a :
   $\overrightarrow{f}'(t) = \ln t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{j}$.
3. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{Arcsin}\, t$ et $t \mapsto \mathrm{Arccos}\, t$ sont dérivables sur $]-1;1[$ donc la fonction $t \mapsto \mathrm{Arccos}\, 2t$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$. On a :
   $\overrightarrow{f}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\overrightarrow{i} + e^{t^2}\left(2t^2+1\right) - \dfrac{2}{\sqrt{1-4t^2}}\overrightarrow{j}$.
4. $(\ln t)^t = \exp\left[t\ln(\ln(t))\right]$ donc la fonction $t \mapsto (\ln t)^t$ est dérivable si et seulement si $\begin{cases} t>0 \\ \ln t > 0 \end{cases}$, donc pour $t>1$.
   $(\cos t)^{\sin t} = \exp\left[\sin t \ln(\cos t)\right]$ donc la fonction $t \mapsto (\cos t)^{\sin t}$ est dérivable si et seulement si $\cos t > 0$, ce qui est bien le cas sur I. On a :
   $\overrightarrow{f}'(t) = (\ln t)^{t-1}\left[\ln(t)\ln(\ln(t))+1\right]\overrightarrow{i} + (\cos t)^{\sin t - 1}\left[\cos^2 t\ln(\cos t) - \sin^2 t\right]\overrightarrow{j}$.
5. Les fonctions x et y sont dérivables sur I d'après les théorèmes usuels et on a :
   $\overrightarrow{f}'(t) = \dfrac{\cos(\ln t)}{t}\overrightarrow{i} - \dfrac{\sin(\ln t)}{t}\overrightarrow{j}$

Exemples 3

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\left(f|g\right)'(t) = \left(f'|g\right)(t) + \left(f|g'\right)(t)$.

   Or, $f'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\overrightarrow{j}$ et $g'(t) = 2t\,\overrightarrow{i} - \sin t\,\overrightarrow{j}$.

   Donc $\left(f|g\right)'(t) = \left(2t\left(t^2-1\right)+2t\right)\mathrm{e}^{t^2} + \dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\cos t - \dfrac{t\sin t}{1+t^2}$.

   $$\|f\|'(t) = \frac{\left(f|f'\right)(t)}{\|f\|(t)} = \frac{2t\left(\mathrm{e}^{t^2}\right)^2 + \dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^3}}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{t^2}\right)^2 + \dfrac{t^2}{t\left(1+t^2\right)^2}}}$$

   $\mathrm{Det}\left(f,g\right)'(t) = \mathrm{Det}\left(f',g\right)(t) + \mathrm{Det}\left(f,g'\right)(t)$

   $= \begin{vmatrix} 2t\mathrm{e}^{t^2} & t^2-1 \\ \dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2} & \cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{t^2} & 2t \\ \dfrac{t}{1+t^2} & -\sin t \end{vmatrix}$

   $= (2t\cos t - \sin t)\,\mathrm{e}^{t^2} - \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \dfrac{2t^2}{1+t^2}$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ -3t^2+1 \end{pmatrix}$ $g'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}$ $h'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $\left(f|g\right)'(t) = \left(f'|g\right)(t) + \left(f|g'\right)(t)$.
   $= 2t^3 - 2t^3 + 2t - 6t^3 + 2t + 6t^3 + 3t^2 - 2t^3 - 2t^3 + 2t = -4t^3 + 3t^2 + 6t$

   $$\|h\|'(t) = \frac{\left(h|h'\right)(t)}{\|h\|(t)} = \frac{2t^3+t+1}{\sqrt{t^4+(t+1)^2+4}}$$

   $\mathrm{Det}(f,g,h)(t) =$
   $\begin{vmatrix} 2 & t^3 & t^2 \\ 2t & -t^2+1 & t+1 \\ -3t^2+1 & 2t & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2t+1 & 3t^2 & t^2 \\ t^2 & -2t & t+1 \\ -t^3+t & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2t+1 & t^3 & 2t \\ t^2 & -t^2+1 & 1 \\ -t^3+t & 2t & 0 \end{vmatrix}$

   $= -14t^6 - 6t^5 + 35t^4 + 4t^3 - 3t^2 - 8t - 6$

Exemples 4

1. On a :
   — $\mathrm{e}^t - 1 \underset{0}{=} t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^5}{120} + o\left(t^5\right)$;
   — $\dfrac{1}{t+1} \underset{0}{=} 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + o\left(t^5\right)$;
   — $\ln(1-u) \underset{0}{=} -u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ donc $\ln\left(1-t^2\right) \underset{0}{=} -t^2 - \dfrac{t^4}{2} + o\left(t^5\right)$.

   Donc $f(t) \underset{0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4\begin{pmatrix} 1/24 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t^5\begin{pmatrix} 1/120 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{o}\left(t^5\right)$.

2. On a :
   — $\dfrac{1}{(1-t)^2}=(1-t)^{-2}\underset{0}{=}1+2t+3t^2+4t^3+5t^4+6t^5+7t^6+o\left(t^6\right)$;
   — $\dfrac{1}{1+t^2}\underset{0}{=}1-t^2+t^4-t^6+o\left(t^6\right)=$ donc Arctan $t\underset{0}{=}$ Arcant $0+t-\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^7}{7}+o\left(t^7\right)$
   et enfin $\dfrac{\arctan(t)}{t}\underset{0}{=}1-\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{t^4}{5}-\dfrac{t^6}{7}+o\left(t^6\right)$.
   Donc $g(t)\underset{0}{=}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}3\\-1/3\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+t^4\begin{pmatrix}5\\1/5\end{pmatrix}+t^5\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+t^6\begin{pmatrix}7\\-1/7\end{pmatrix}+o\left(t^6\right)$.
   $g:I\longrightarrow\mathbb{R}^2 \quad g(t)=\left(\dfrac{1}{(1-t)^2},\dfrac{\arctan(t)}{t}\right) \qquad n=6$
3. On a :
   — $1-\cos t\underset{0}{=}\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^4}{24}+o\left(t^5\right)$.
   $\sin t\underset{0}{=}t-\dfrac{t^3}{6}+o\left(t^4\right)$ et $\dfrac{1}{1-u}\underset{0}{=}1+u+u^2+u^3+o\left(u^3\right)$ donc
   $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}\underset{0}{=}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^3}{24}+o\left(t^4\right)\right)\times\left(1+\dfrac{t^2}{6}+o\left(t^3\right)\right)=\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^3}{24}+o\left(t^3\right)$
   — $\sin t\underset{0}{=}t-\dfrac{t^3}{6}+o\left(t^4\right)$ donc $\sin^2 t\underset{0}{=}\left(t-\dfrac{t^3}{6}+o\left(t^4\right)\right)^2\underset{0}{=}t^2-\dfrac{t^4}{3}+o\left(t^4\right)$ et
   $\dfrac{\sin^2 t}{t}\underset{0}{=}t-\dfrac{t^3}{3}+o\left(t^3\right)$
   Donc $h(t)\underset{0}{=}t\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}-1/24\\-1/3\end{pmatrix}+\overrightarrow{o}\left(t^3\right)$

Exemples 5

1. La fonction $t\mapsto x(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'arc ne possède aucun point double.
2. $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ est un point double si et seulement si on a
   $\begin{cases} x(t_1) &= x(t_2)\\ y(t_1) &= y(t_2)\end{cases}\ (t_1\neq t_2)$
   $\iff\begin{cases}2t_1+t_1^2=2t_2+t_2^2\\ =2t_1-\dfrac{1}{t_1^2}=2t_2-\dfrac{1}{t_2^2}\end{cases}\iff\begin{cases}2(t_1-t_2)+(t_1-t_2)(t_1+t_2)=0\\ 2(t_1-t_2)-\left(\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}\right)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)=0\end{cases}$
   Comme $t_1\neq t_2$, ce système est équivalent à : $\begin{cases}2+t_1+t_2=0\\ 2(t_1-t_2)-\left(\dfrac{t_2}{t_1t_2}-\dfrac{t_1}{t_1t_2}\right)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)=0\end{cases}$
   $\iff\begin{cases}2+t_1+t_2=0\\ 2+\dfrac{1}{t_1t_2}\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)=0\end{cases}\iff\begin{cases}2+t_1+t_2=0\\ 2t_1t_2+\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=0\end{cases}\iff\begin{cases}2+t_1+t_2=0\\ 2t_1t_2-\dfrac{2}{t_1t_2}=0\end{cases}$
   $\iff\begin{cases}t_1+t_2=-2\\ t_1t_2=\sqrt{2}\text{ ou }t_1t_2=-1\end{cases}$
   Donc t_1 et t_2 sont les solutions de l'équation $T^2+2T-1=0$, dont les solutions sont $T=-1-\sqrt{2}$ et $T=-1+\sqrt{2}$.
   On a donc un point double de paramètres $t_1=-1-\sqrt{2}$ et $t_2=-1+\sqrt{2}$. En outre, on a $x(t_1)=x(t_2)=-1$ et $y(t_1)=y(t_2)=-5$ donc les coordonnées de ce point sont $(-1,-5)$.

3. $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ est un point double si et seulement si on a
$\left\{\begin{array}{ll} x(t_1) & = x(t_2) \\ y(t_1) & = y(t_2) \end{array}\right. \ (t_1 \neq t_2)$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{t_1^2 - t_1} = \dfrac{1}{t_2^2 - t_2} \\ \dfrac{t_1}{t_1^2 - 1} = \dfrac{t_2}{t_2^2 - 1} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_2^2 - t_2 - t_1^2 + t_1 = 0 \\ t_1\left(t_2^2 - 1\right) - t_2\left(t_1^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (t_2 - t_1)(t_2 + t_1 - 1) = 0 \\ (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_2 + t_1 = 1 \\ t_1 t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Donc t_1 et t_2 sont les solutions de l'équation $T^2 + -T - 1 = 0$, dont les solutions sont $T = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $T = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc un point double de paramètres $t_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. En outre, on a $x(t_1) = x(t_2) = 1$ et $y(t_1) = y(t_2) = 1$ donc les coordonnées de ce point sont $(1, 1)$.

Définition 7 : point régulier

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe C^k avec $k \geq 1$.
Un point $M_0 = M(t_0)$ est un point régulier de Γ si $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Propriété 6 : tangente en un point M_0

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc de classe C^k avec $k \geq 1$.
Si en $M_0 = M(t_0)$ point de Γ, il existe une entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et tel que $f^{(k)}(t_0) = 0$ pour $k < p$, alors le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente en m_0 à Γ.
En particulier, si $M_0 = M(t_0)$ est un point régulier de Γ alors Γ admet une tangente au point M_0, dirigée par le vecteur $f'(t_0)$

Exemples 6
Déterminer les points non réguliers des arcs suivants, et étudier la tangente en ces points.

1. $\left\{\begin{array}{l} x = e^{t-1} - t \\ y = t^3 - 3t \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{array}\right.$

Propriété 7 : longueur d'un arc

Soient $(t_1, t_2) \in I^2$ avec $t_1 < t_2$
La longueur de l'arc $M_1(t)M_2(t)$ de Γ, décrit par le point $M(t)$ lorsque t décrit $[t_1, t_2]$ est le réel :

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

En particulier pour une courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \in [a, b]$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Exemples 7
Calculer les longueurs des arcs suivants :

1. Calculer la longueur d'un cercle de rayon R.
2. Calculer la longueur de l'astroïde de paramétrage :
$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ pour $t \in [0; 2\pi]$
3. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde de paramétrage :
$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ pour $t \in [0; 2\pi]$

Plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes

1. Intervalle de définition, réduction de l'intervalle d'étude par parité, périodicité...
2. Tableau des variations simultanées de x et de y
3. Étude des tangentes particulières
4. Recherche de points multiples
5. Tracé de la courbe représentative

Exemples 8

1. Étudier l'arc paramétré défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ \\ y = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{array}\right.$$

2. Étudier l'arc paramétré défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$$

3. Étudier l'arc paramétré défini par : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ \\ y(t) = 2t + t^2 \end{array}\right.$