

TD Chapitre 7 : Probas dénombrables

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$, on a bien $P(X = n) > 0$.

On doit vérifier que $P(\Omega) = 1$, c'est-à-dire que $\sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}} P(X = n) = 1$.

— supposons $n > 0$: la série à termes positifs de terme général $\frac{1}{2n(n+1)}$ est convergente d'après le théorème d'équivalence. En effet, $\frac{1}{2n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Soit $k \geq 1$: on pose $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)}$.

Or, pour tout $n > 0$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc

$$S_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

On a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \frac{1}{2}$.

— supposons $n < -1$: la série à termes positifs de terme général $\frac{1}{2n(n+1)}$ est convergente d'après le théorème d'équivalence. En effet, $\frac{1}{2n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Soit $k \geq 1$: on pose $S_k = \sum_{n=-2}^k \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-2}^k \frac{1}{n(n+1)}$.

Or, pour tout $n < -1$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc

$$S_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-2}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=-2}^k \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-2}^k \frac{1}{n} - \sum_{n=-1}^{k+1} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

On a donc $\lim_{k \rightarrow -\infty} S_k = \frac{1}{2}$.

Ces deux séries étant convergentes, leur somme est convergente et converge vers 1, ce qu'on voulait démontrer.

2. On doit étudier l'absolue convergence de la série de terme général

$$nP(X = n) = \frac{1}{2|n+1|}.$$

Pour $n > 0$, le terme général de cette série à termes positifs est équivalent à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1}$

où $\frac{1}{n+1}$ est le terme général de la série harmonique divergente. Donc X n'est pas d'espérance finie.

Exercice 2

1. Pour $k = 1$, on a $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Pour } k > 1, \text{ on a } P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{2}{k^2} - \frac{2}{(k+1)^2} = \frac{2(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$\text{Donc } P(X = k) = \frac{2(2k+1)}{k^2(k+1)^2}.$$

2. On étudie l'absolue convergence de la série de terme général

$$kP(X = k) = \frac{2(2k+1)}{k(k+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{4}{k^2} \text{ qui est le terme général d'une série convergente.}$$

Donc X est d'espérance finie.

3. De même, on étudie l'absolue convergence de la série de terme général

$$k^2 P(X = k) = \frac{2(2k+1)}{(k+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{4}{k} \text{ qui est le terme général d'une série divergente.}$$

Donc X^2 n'est pas d'espérance finie.

Exercice 3

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $P(X = k) > 0$.

On doit avoir que $P(\Omega) = 1$, c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ doit être convergente, donc on doit avoir $\alpha > 1$.

$$\text{En outre, il faut } \sum_{k>0} P(X = k) = 1, \text{ c'est à dire } \frac{1}{C} = \sum_{k>0} \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. De même, on montre facilement que X est d'espérance finie si et seulement si $\alpha > 2$, et X^2 est d'espérance finie si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice 4

1. Le hamster n'étant pas doué d'apprentissage, X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$ (rang d'apparition du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre commun $\frac{1}{5}$).

$$\text{On en déduit que pour tout entier } n \text{ strictement positif, on a } P(X = n) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}^{n-1}.$$

On en déduit facilement les probabilités demandées :

$$\text{a. } P(X = 1) = \frac{4}{5}.$$

$$\text{b. } P(X = 3) = \frac{15}{125}.$$

$$\text{c. } P(X = 7) = \frac{4096}{78125}.$$

2. a. Le hamster peut sortir au premier, deuxième, ..., cinquième essai. Donc

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Pour $n \in X(\Omega)$, on appelle A_n l'évènement "la hamster choisit la bonne porte à la n -ième tentative.

$$\text{— On a } P(X = 1) = P(A_1) = \frac{1}{5}.$$

$$\text{— } P(X = 2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P_{\overline{A_1}}(A_2) \times P(\overline{A_1}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{— } P(X = 3) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) \times P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_1}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

- On montre de façon analogue que $P(X = 4) = P(X = 5) = \frac{1}{5}$.
 X suit donc une loi uniforme de paramètre 5.
- b.** D'après le cours, on a $E(X) = \frac{5+1}{2} = 3$.
 En moyenne, le hamster sort au bout de trois essais.
- c.** De même, on a $V(X) = \frac{5^2-1}{12} = 2$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p , et n et k deux entiers strictement positifs.

On a $P_{X>n}(X > n+k) = \frac{P[(X > n+k) \cap (X > n)]}{P(X > n)} = \frac{P[(X > n+k)]}{P(X > n)}$ puisque l'évènement $X > n$ est inclus dans l'évènement $X > n+k$.

$$P(X > n+k) = 1 - P(X \leq n+k) = 1 - \sum_{i=1}^{n+k} P(X=i) = 1 - \sum_{i=1}^{n+k} p(1-p)^{i-1} = 1 - p \sum_{i=0}^{n+k-1} (1-p)^i$$

$$= 1 - p \times \frac{1 - (1-p)^{n+k}}{1 - (1-p)} = (1-p)^{n+k}$$

On montre de même que $P(X > n) = (1-p)^n$ et $P(X > k) = (1-p)^k$.

On a donc $P_{X>n}(X > n+k) = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = P(X > k)$.

Donc X vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$P_{X>n}(X > n+k) = P(X > k)$$

Cela signifie que la probabilité que le premier succès apparaisse après k tentatives est la même que la probabilité que le premier succès apparaisse après $n+k$ tentatives, à condition que les n premières tentatives aient été des échecs : il s'agit donc bien d'absence de mémoire.

Exercice 6

1. X compte le nombre de "succès" (la pièce prélevée est défectueuse) dans une succession de $n = 80$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre

$$p = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}.$$

Donc X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(80, \frac{1}{200}\right)$.

2. D'après le cours on peut l'approximer par une loi de Poisson Y de paramètre

$$80 \times \frac{1}{200} = \frac{2}{5}.$$

3. **a.** $P(Y = 0) = e^{-2/5}$.

b. $P(Y = 2) = e^{-2/5} \times \frac{(2/5)^2}{2!}.$

c. $P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) =$
 $1 - e^{-2/5} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{(2/5)^2}{2!}\right).$

d. $P(Y < 5) = \sum_{k=0}^4 P(Y = k) = e^{-2/5} \sum_{k=0}^4 \frac{(2/5)^k}{k!}.$

Exercice 7

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers ne se présentant pas à l'embarquement. X compte le nombre de "succès" (le voyageur ne se présente pas) dans une succession de $n = 103$ expériences aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre 0,03.

Donc X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(103, \frac{3}{100}\right)$. La probabilité d'être en surbooking est donc égale à $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{103}{0} 0,97^{103} + \binom{103}{1} 0,03 \times 0,97^{102} + \binom{103}{2} 0,03^2 \times 0,97^{101} = 0,3997$ arrondi à 10^{-4} .

Exercice 8

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de rhumes attrapés par l'individu dans l'hiver, et B l'évènement "Le médicament lui a été bénéfique".

On cherche donc la probabilité conditionnelle $P_{(X=2)}(B) = \frac{P(B \cap (X=2))}{P(X=2)}$.

L'évènement $(X=2) \cap B$ peut être traduit par "Le médicament a été bénéfique et l'individu a attrapé deux rhumes". Sa probabilité est donc égale à $0,75 \times e^{-3} \times \frac{3^2}{2!} = 0,168$ arrondi à 10^{-3} .

Le système $\{B, \bar{B}\}$ est une partition de l'univers. En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X=2) = P(B) \times P_B(X=2) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(X=2)$$

$$\text{Donc } P(X=2) = 0,75 \times e^{-3} \times \frac{3^2}{2!} + 0,25 \times e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} = 0,189 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

On peut donc dire que la probabilité que le médicament lui ait été bénéfique est égale à $\frac{0,168}{0,189} = 0,889$ arrondi à 10^{-3} .

Exercice 9

Soit $Y = \frac{1}{X+1} : Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{k+1}; k \geq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{k}; k \geq 2 \right\}$ et pour tout $k \geq 2$, on a

$$P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X = k-1) = p(1-p)^{k-2}.$$

On doit montrer que la série de terme général $kP(Y = k) = \frac{p(1-p)^{k-2}}{k}$ est absolument convergente.

Cette série est à termes positifs donc on peut étudier sa convergence. On a $0 < 1-p < 1$ et d'après les théorèmes de comparaison, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} k^3(1-p)^{k-2} = 0$.

Donc, pour k assez grand, on a $k^3(1-p)^{k-2} < 1$ donc $k(1-p)^{k-2} < \frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

La série est donc convergente d'après le critère de comparaison.

Pour tout réel x de $] -1, 1[$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

D'après les théorèmes usuels des séries entières, cette série est intégrable sur $] -1, 1[$ et on a :

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Pour $x = 1-p$, on a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = -\ln(p)$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = -\ln(p) - (1-p)$ et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(1-p)^{k-2}}{k} = -\frac{\ln(p)}{(1-p)^2} - \frac{1}{1-p} \text{ et finalement, } E(Y) = p \left(\frac{\ln(p)}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-p} \right).$$