TD Chapitre 7 : Probas dénombrables

Exercice 1
Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z} - \{0, -1\}$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}, P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

1. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité pour X.
2. X est-elle d'espérance finie ?

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ dont la fonction de répartition est donnée par

$$\forall x \in [k; k+1[, P(X \leqslant x) = 1 - \frac{2}{(k+1)^2}$$

1. Donner la loi de X.
2. X est-elle d'espérance finie ?
3. X^2 est-elle d'espérance finie ?

Exercice 3
Soit $C > 0$ et $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}$$

1. A quelles conditions sur α et C, cette formule détermine-t-elle bien la loi d'une variable aléatoire réelle ?
2. A quelles conditions supplémentaires sur α la variable X est-elle d'espérance finie ? La variable X^2 est-elle d'espérance finie ?

Exercice 4
On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :
   a. le hamster sort au premier essai,
   b. le hamster sort au troisième essai,
   c. le hamster sort au septième essai.
2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   a. Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
   b. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$: interpréter le résultat.

c. Déterminer la variance $V(X)$.

Exercice 5
Montrer que si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique, elle vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$P_{X>n}(X > n+k) = P(X > k)$$

Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.

Exercice 7
Sur une chaîne de montage, on considère qu'en moyenne 5 appareils sur 1000 sont défectueux.
On prélève 80 appareils en sortie de chaîne et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'appareils défectueux.

1. Quelle loi suit la variable X ? Donner ses paramètres.
2. Par quelle loi peut-elle être approximée ? Donner son paramètre.
3. Donner la probabilité que :
   a. aucun appareil n'est défectueux.
   b. deux appareils sont défectueux.
   c. plus de deux appareils sont défectueux.
   d. moins de cinq appareils sont défectueux.

Exercice 8
Un voyagiste dispose de 100 places dans un avion. Sachant qu'en moyenne, 3% des voyageurs ne se présentent pas à l'embarquement, il décide d'enregistrer 103 réservations. Quelle est la probabilité d'être en surbooking ?

Exercice 9
Le nombre de fois où un individu attrape un rhume en une année donnée est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Un nouveau médicament vient d'être mis à disposition sur le marché. Il réduit le paramètre de Poisson à $\lambda = 3$ pour 75% de la population.
Pour le reste de la population, le médicament est sans effet notable sur les rhumes.
Si un individu essaie le médicament pendant un an et attrape deux rhumes au cours de cette période, quelle est la probabilité que le médicament lui ait été bénéfique ?

Exercice 10
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $\dfrac{1}{X+1}$ est d'espérance finie et calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.