TD Chapitre 9 : Équations différentielles

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $xy' - 3y = 0$ d'inconnue y fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $y'(e^x - e^{-x}) - y(e^x + e^{-x}) + 2 = 0$ d'inconnue y fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable.

Exercice 3 (*)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - f(x) = e^x \int_0^1 f(t) dt.$$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable sur l'intervalle ouvert I (on pourra utiliser le changement de fonction inconnue par $z = \frac{y}{x}$).

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + 4e^{-2x}y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable (on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = e^{-x}$).

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

d'inconnue $y :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

Exercice 7 (*)

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = xf(-x)$$

Exercice 8

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + z + t \\ y' &= x + y + 2z \\ z' &= x + 3z \end{cases}$$