TD Chapitre 9 : Équations différentielles CORRECTION

Exercice 1
Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$:
Sur $]-\infty;0[$, l'équation s'écrit $y' - \dfrac{3}{x}y = 0$ donc :
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{x}$ sur $]-\infty;0[$ est $3\ln(-x) = \ln\left(-x^3\right)$:

$$\mathscr{S}_- = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K_1 x^3 \end{array} \quad K_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:
On prouve de même que $\mathscr{S}_+ = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K_2 x^3 \end{array} \quad K_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Résolution sur $\mathbb{R}$:
Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) : par continuité, on a $f(0) = 0$ et d'après ce qui précède, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = K_1 x^3 \text{ pour } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = K_2 x^3 \text{ pour } x > 0 \end{array} \right.$$

Pour $x < 0$, on a $f'(x) = 3K_1x^2$ donc $f_g'(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a $f'(x) = 3K_2x^2$ donc $f_d'(0) = 0$.
Ainsi, f est solution de (E) et toutes les fonctions de ce type sont solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
$e^x - e^{-x} = 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$.
Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$:
Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation homogène s'écrit $y' - \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}y = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $\ln(e^{-x} - e^x)$ donc :

$$\mathscr{S}_-^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K_1(e^{-x} - e^x) \end{array} \quad K_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

On recherche une solution particulière sous la forme $f(x) = K(x)(e^x - e^{-x})$.
Pour $x < 0$, on a $f'(x) = K'(x)(e^x - e^{-x}) + K(x)(e^x + e^{-x})$

Ainsi, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si
$K'(x)(e^x - e^{-x})^2 + K(x)(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) - K(x)(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = -2$

$\Longleftrightarrow K'(x) = \dfrac{-2}{(e^x - e^{-x})^2}$

Attention, astuce de vieux boeuf cornu qui a déjà brouté pendant bien des printemps :
$K'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$.

On reconnait là la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, donc $K(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ convient.

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ est $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Ainsi, $\mathscr{S}_- = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K_1(e^{-x} - e^x) + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \quad K_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:
On prouve de façon strictement analogue que
$$\mathscr{S}_+ = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K_2\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \quad K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
Résolution sur $\mathbb{R}$:
Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) : par continuité, on a $f(0) = 1$ et d'après ce qui précède, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que :
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = K_1\,(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ pour } x < 0 \\ f(0) = 1 \\ f(x) = K_2\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ pour } x > 0 \end{array} \right.$$
Pour $x < 0$, on a $f'(x) = K_1\,(-\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ donc $f_g'(0) = -2K_1$.
Pour $x > 0$, on a $f'(x) = K_2\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ donc $f_d'(0) = 2K_2$.
Donc f est dérivable en 0 si et seulement si $K_1 = -K_2$ et, dans ce cas, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
On a donc $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longleftrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K\,(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right\}$

Exercice 3 (*)
Analyse :
Soit f une solution de cette équation différentielle. On a alors :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
On a donc $f'' - f' = f' - f$ sur $\mathbb{R}$ soit $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$.
On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2; f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.
Synthèse
Soit $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.
f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x+1)\mathrm{e}^x - (ax+b)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left[(at - a + b)\mathrm{e}^t\right]_0^1$$
$$a\mathrm{e}^x = (a + b(e-1)\mathrm{e}^x$$
$$b(\mathrm{e}-1) = 0$$
$$b = 0$$
$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax\mathrm{e}^x \end{array} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$
Le problème de Cauchy admet une unique solution et on a $a \times 1 \times \mathrm{e}^1 = 1$ soit $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Finalement, l'unique solution cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^{x-1}$.

Exercice 4
Soit I l'intervalle $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

On pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ soit $y(x) = xz(x)$.
On a donc : $\forall x \in I, y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$.
Ainsi, y est solution de l'équation différentielle sur I si et seulement si :

$$x^2\left(xz''(x) + 2z'(x)\right) - 2x\left(xz'(x) + z(x)\right) + \left(x^2+2\right)xz(x) = 0$$

$$x^3\left(z''(x) + z(x)\right) = 0$$

$$z''(x) + z(x) = 0$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$.
On en déduit qu'il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que $z(x) = K_1\cos x + K_2\sin x$ et donc $y(x) = xK_1\cos x + xK_2\sin x$. Existe t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
Analyse :
S'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}$, alors on a :
$\begin{cases} y(x) &= K_1 x\cos x + K_2 x\sin x \ (x<0) \\ y(0) &= 0 \\ y(x) &= H_1 x\cos x + H_2 x\sin x \ (x>0) \end{cases}$
Synthèse :
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$ donc y est continue en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = K_1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = H_1$.

y est donc dérivable en 0 si et seulement si $K_1 = H_1$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y'(x)-y(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(K_2x+K_1)\cos x + (K_2 - K_1x)\sin x}{x}$.
$= K_2 + \lim\limits_{x\to 0^-} K_1\dfrac{\cos x}{x} + K_2\dfrac{\sin x}{x}$ et cette limite existe si et seulement si $K_1 = 0$ et donc $H_1 = 0$.
Dans ce cas, elle est égale à $2K_2$ puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
De même, on montre facilement qu'alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y'(x)-y(0)}{x} = 2H_2$.
Ainsi, $y''(0)$ existe si et seulement si $H_1 = K_1 = 0$ et $H_2 = K_2$.

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & Ax\sin x + Bx\cos x \end{array} \right\}$$

Exercice 5
Soit $x \in \mathbb{R}$:comme l'énoncé le suggère, on pose $t = \mathrm{e}^{-x}$ et $z(t) = z\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = y(x)$.
On a donc $y'(x) = -\mathrm{e}^{-x}z'\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ et $y''(x) = \mathrm{e}^{-2x}z''\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + \mathrm{e}^{-x}z'\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.
Ainsi, y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-2x}z''\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + \mathrm{e}^{-x}z'\left(\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^{-x}z'\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + 4\mathrm{e}^{-2x}z\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$$

$$\mathrm{e}^{-2x}\left(z''\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + 4z\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = 0$$

$$z''(t) + 4z(t) = 0$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4 = 0$.
On en déduit qu'il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que
$z(t) = K_1\cos(2t) + K_2\sin(2t)$.
Ainsi, $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & K_1\cos\left(2\mathrm{e}^{-x}\right) + K_2\sin\left(2\mathrm{e}^{-x}\right) \end{array} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 6

On cherche des solutions de l'équation homogène sous la forme $x^\alpha\,(x>0)$.
On a alors $\alpha(\alpha-1)x^\alpha+4\alpha x^\alpha+2x\alpha=0$
$\alpha(\alpha-1)+4\alpha+2=0$ car $x>0$
$\alpha^2+3\alpha+2=0$
$\alpha=-2$ ou $\alpha=-1$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2} \qquad (a,b)\in\mathbb{R}^2$.
On cherche une solution particulière de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière :
Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On a alors, pour $|x|<R$:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \text{ et } y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Ainsi, y est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$2a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2+3n+2\right)a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0\\ a_1 & = & 1/6\\ \forall n\geq 2, a_n & = & \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0\\ \forall n\geq 1, a_n & = & \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\end{array}\right.$$

Ainsi, $y(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}x^n$ et on montre facilement, en utilisant le critère de D'Alembert, que le rayon de convergence de cette série entière est 1.
On cherche A,B et C tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$.
En multipliant par n et pour $n=0$, on trouve $A=1/2$
En multipliant par $n+1$ et pour $n=-1$, on trouve $B=-1$
En multipliant par $n+2$ et pour $n=-2$, on trouve $C=1/2$.
On montre facilement que toutes ces séries entières ont un rayon de convergence égal à 1 et :
$\forall x\in]-1,1[,\, y(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}x^n$.

$$\text{Pour } x\neq 0, y(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}x^{n+2}$$

$$\text{Pour } x\neq 0, y(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}+\frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n}$$

$$\text{Pour } x\neq 0, y(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-x\right)+\frac{1}{2x^2}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\text{Pour } x\neq 0, y(x)=\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4}$$

Finalement, $\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{lcl}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}\end{array}\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$

$$\bigcup \left\{ \begin{array}{ccc}]-1;0[& \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} \end{array} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 7 (*)

On cherche les solutions développables en série entière :

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $|x| < R$, on a $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ et

$xf(-x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} a_{n-1} x^n$.

f est solution de l'équation différentielle sur $[-R, R]$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & 0 \\ \forall n \geq 1, a_{n+1} & = & \dfrac{(-1)^{n-1} a_{n-1}}{n+1} \end{array} \right.$$

On conjecture et on montre très facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{2n+1} & = & 0 \\ a_{2n} & = & \dfrac{a_0}{2^n n!} \end{array} \right.$$

Pour $x \neq 0$, on pose $b_n = a_{2n} x^{2n}$: on a $\left| \dfrac{b_{2n+2}}{b_{2n}} \right| = \dfrac{|x|^2}{2(n+1)}$ donc le critère de d'Alembert permet d'affirmer que $R = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = a_0 \sum_{n\geq 0} \dfrac{(x^2/2)^n}{n!}$, et donc $f(x) = a_0 \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

Les fonctions du type $x \mapsto A\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ $(A \in \mathbb{R})$ sont donc solution de cette équation. On pose $y(x) = K(x)\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ une solution de (E). Montrons que $K(x)$ est une constante, ce qui prouvera que toutes les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = A\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

$y'(x) = xf(-x) \Longleftrightarrow K'(x)\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + xK(x)\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = xK(x)\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \Longleftrightarrow K'(x)\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow K'(x) =.$

Finalement, $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & K\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \end{array} \quad K \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 8

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Le système s'écrit alors $X' = AX + B$.

Résolution du système homogène :

On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 \\ -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$

En remplaçant C_2 par $C_2 + C_3$, on a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ -1 & X-1 & X-3 \\ -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$

$= (X-3)\begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ -1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X-3)\begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-2)(X-1)$

La matrice possède trois valeurs propres réelles distinctes et est donc diagonalisable.

On trouve facilement trois vecteurs propres associés aux valeurs propres 1, 2 et 3 :

$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\{V_1; V_2; V_3\}$, le système homogène s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

On a donc $u(t) = A\mathrm{e}^t$, $v(t) = B\mathrm{e}^{2t}$ et $w(t) = C\mathrm{e}^{3t}$ avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$.

En posant $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, les formules de changement de bases s'écrivent $X = PY$ soit :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\mathrm{e}^t \\ B\mathrm{e}^{2t} \\ C\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

Les solutions du système homogène sont donc $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2A\mathrm{e}^t - B\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) & = & -A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{3t} \\ z(t) & = & A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{3t} \end{array}\right.$

Recherche d'une solution particulière

On pose $x_0(t) = \alpha_1 t + \beta_1$, $y_0(t) = \alpha_2 t + \beta_2$ et $z_0(t) = \alpha_3 t + \beta_3$ et on cherche des conditions sur ces six réels pour que x_0, y_0 et z_0 soient solutions du système.

On a donc le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & (2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 1)\, t + \left(2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3\right) \\ \alpha_2 & = & (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)\, t + \left(\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3\right) \\ \alpha_3 & = & (\alpha_1 + 3\alpha_3)\, t + \left(\beta_1 + 3\beta_3\right) \end{array}\right.$$

On trouve alors $x_0(t) = -\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}$, $y_0(t) = \dfrac{1}{6}t + \dfrac{5}{36}$ et $z_0(t) = \dfrac{1}{6}t + \dfrac{5}{36}$.

Finalement, on a $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & -2A\mathrm{e}^t - B\mathrm{e}^{2t} + x_0(t) \\ y(t) & = & -A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{3t} + y_0(t) \\ z(t) & = & A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{3t} + z_0(t) \end{array}\right.$