TD Chapitre 11 : Espaces pré-hilbertiens réels

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3) et les vecteurs $u = 3e_1 - 2e_2$, $v = e_1 + e_2 + e_3$ et $w = e_2 - e_3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser cette base pour le produit scalaire canonique.
3. Soit φ l'application définie de $(\mathbb{R}^3)^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } y = (y_1, y_2, y_3), \quad \varphi(x, y) = x_1 y_1 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

   a. Montrer que φ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.
   b. Orthonormaliser la base canonique pour le produit scalaire φ.

Exercice 2
On définit l'application φ de $(\mathbb{R}_3[X])^2$dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ orthonormale pour φ.

Exercice 3 *
Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

Exercice 4
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan F d'équation cartésienne $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$.

Exercice 5
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle .|. \rangle$ défini par $\langle A|B \rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$. On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})^{\perp}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6
Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ que l'on munit du produit scalaire défini par : $\langle f|g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Soit P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E.
   a. Justifier que $P \subset I^{\perp}$.
   b. Montrer que I et P sont supplémentaires dans E.
   c. En déduire que $P = I^{\perp}$.
2. Soit f la fonction de E définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$. Déterminer le projeté orthogonal de f sur I.

Exercice 7
Calculer le minimum de la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x$$