# TD Chapitre 11 : Espaces pré-hilbertiens réels

**Exercice 1**

1. $\text{Det}(u,v,w) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ donc cette famille est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

— On pose $\epsilon_1 = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

— On pose $\epsilon_2' = v - \langle \epsilon_1 | v \rangle \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{13}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$, et on pose alors $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{494}}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$

— On pose $\epsilon_3' = w - \langle \epsilon_1 | w \rangle \epsilon_1 - \langle \epsilon_2 | w \rangle \epsilon_2$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{13}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{494}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{2}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{494}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix}$

Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$ et à $\epsilon_2$, et on pose alors $\epsilon_3 = \dfrac{\epsilon_3'}{\|\epsilon_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

La base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est alors une base orthonormée pour le produit scalaire usuel.

3. **a.** on doit montrer que $\phi$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$.

— Il est évident que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, on a $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ donc $\underline{\varphi \text{ est symétrique}}$.

— Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x_1', x_2', x_3')$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda x + x', y) =$

$(\lambda x_1 + x_1')\, y_1 + \left[(\lambda x_1 + x_1') - (\lambda x_2 + x_2')\right] \times [y_1 - y_2] + \left[(\lambda x_2 + x_2') + (\lambda x_3 + x_3')\right] \times [y_2 + y_3]$

$=$

$\lambda\left(x_1 y_1 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)\right) + x_1' y_1 + (x_1' - x_2')(y_1 - y_2) + (x_2' + x_3')(y_2 + y_3)$

$= \lambda \varphi(x,y) + \varphi(x', y)$.

Donc $\varphi$ est linéaire par rapport à la première variable et comme elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.

— Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ : on a $\varphi(x,x) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$ donc $\underline{\varphi \text{ est positive}}$ comme somme de carrés de réels.

— Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(x,x) = 0$. Une somme de carrés de réels est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls donc on résout le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff x = 0$ donc $\underline{\varphi \text{ est définie}}$

**b.** On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

— On pose $\epsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ où $\|e_1\|^2 = \varphi(e_1, e_1) = 1^2 + (1-0)^2 + (0+0)^2 = 2$ donc on a :

$\epsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

— On pose $\epsilon_2' = e_2 - \varphi(\epsilon_1, e_2)\,\epsilon_1$ avec

$\varphi(\epsilon_1, e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1\times 0 + (1-0)\times(0-1) + (0+0)\times(1+0)\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\epsilon_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}$

Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$, et on pose alors $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2'\|}$

avec $\|\epsilon_2'\|^2 = \varphi\left(\epsilon_2', \epsilon_2'\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + (1+0)^2 = \dfrac{3}{2}$ et donc on a $\epsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix}$.

— On pose $\epsilon_3' = e_3 - \varphi(\epsilon_1, e_3)\,\epsilon_1 - \varphi(\epsilon_2, e_3)\,\epsilon_2$ avec :

$\varphi(\epsilon_1, e_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1\times 0 + (1-0)\times(0-0) + (0+0)\times(0+1)\right) = 0$

$\varphi(\epsilon_2, e_3) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(1/2\times 0 + (1/2-1)\times(0-0) + (1+0)\times(0+1)\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc $\epsilon_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1/2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$

Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$, et on pose alors $\epsilon_3 = \dfrac{\epsilon_3'}{\|\epsilon_3'\|}$

avec $\|\epsilon_3'\|^2 = \varphi\left(\epsilon_3', \epsilon_3'\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}+1\right)^2 = \dfrac{1}{3}$ et donc on a

$\epsilon_3 = \sqrt{3}\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$.

La base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est alors une base orthonormée pour le produit scalaire $\varphi$.

**Exercice 2**

1. on doit montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X]$.
   - $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X]$, on a $\varphi(P,Q) \in \mathbb{R}$.
   - Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X]$ : il est évident que $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ donc $\underline{\varphi \text{ est symétrique}}$.
   - Soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On a
     $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \sum_{i=0}^{3} (\lambda P_1 + P_2)(i) Q(i) = \sum_{i=0}^{3} (\lambda P_1(i) Q(i) + P_2(i) Q(i)) = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$.
     Ainsi, $\underline{\varphi \text{ est linéaire par rapport à la première variable et symétrique donc bilinéaire}}$.
   - Soit $P \in \mathbb{R}^3[X] : \varphi(P,P) = \sum_{i=0}^{3} P^2(i) \geq 0$ comme somme de réels élevés au carré donc $\underline{\varphi \text{ est positive}}$.
   - Soit $P \in \mathbb{R}^3[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$ :
     On a donc $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ donc le polynôme $P$, de degré inférieur ou égal à 2, possède trois racines distinctes et donc il est nul. $\underline{\text{Donc } \varphi \text{ est définie}}$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt avec la base $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.
   - On pose $\epsilon_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|}$ avec $\|e_0\|^2 = \varphi(e_0, e_0) = 1^2 + 1^2 + 1^2$.
     Donc on a $\epsilon_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   - On pose $\epsilon_1' = e_1 - \varphi(\epsilon_0, e_1) \epsilon_0$ avec $\varphi(\epsilon_0, e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0+1+2) = \sqrt{3}$
     $\epsilon_1' = X - 1$
     Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_0$, et on pose alors $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon_1'}{\|\epsilon_1'\|}$
     avec $\|\epsilon_1'\|^2 = \varphi\left(\epsilon_1', \epsilon_1'\right) = (0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 2$ et donc on a $\epsilon_1 = \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$.
   - On pose $\epsilon_2' = e_2 - \varphi(\epsilon_0, e_2) \epsilon_0 - \varphi(\epsilon_1, e_2) \epsilon_1$ avec :
     $\varphi(\epsilon_0, e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(0^2 + 1^2 + 2^2\right) = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$
     $\varphi(\epsilon_1, e_2) = \left(\dfrac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \times 0^2 + \left(\dfrac{1-1}{\sqrt{2}}\right) \times 1^2 + \left(\dfrac{2-1}{\sqrt{2}}\right) \times 2^2 = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$.
     Donc $\epsilon_2' = X^2 - \dfrac{5}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{4}{\sqrt{2}} \times \dfrac{X-1}{\sqrt{2}} = X^2 - 2X + \dfrac{1}{3}$
     Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$, et on pose alors $\epsilon_3 = \dfrac{\epsilon_3'}{\|\epsilon_3'\|}$
     avec $\|\epsilon_3'\|^2 = \varphi\left(\epsilon_3', \epsilon_3'\right) = \left(0^2 - 2 \times 0 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(1^2 - 2 \times 1 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(2^2 - 2 \times 2 + \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3}$ et donc on a $\epsilon_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \dfrac{1}{3}\right)$.

   La base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est alors une base orthonormée pour le produit scalaire $\varphi$.

**Exercice 3 ***

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel : on pose $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors : $\begin{cases} \overrightarrow{x}.\overrightarrow{u} = n \\ \|\overrightarrow{x}\|^2 = n \end{cases}$.

On a donc $\left|\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}\right| = \|\overrightarrow{x}\| \times \|\overrightarrow{u}\|$ : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le vecteur $\overrightarrow{x}$ est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{u}$.
Comme $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u} = n$, on a donc $\lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 = n$ soit $\lambda = 1$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}$.

**Exercice 4**

On pose $e_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$. La famille $(e_1, e_2)$ est une famille de deux vecteurs libre (évident) du plan $F$ de dimension 2 : c'est donc une base de $F$.
On orthonormalise cette base à l'aide de la méthode de Schmidt :

— On pose $\epsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

— On pose $\epsilon_2' = e_2 - \langle e_2|\epsilon_1\rangle\epsilon_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{1}{10}\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$

Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_1$, on pose alors $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$

La base $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ est donc une base orthonormée de $F$.

On a donc, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ :

$$p\left(\overrightarrow{u}\right) = \langle\overrightarrow{u}|\epsilon_1\rangle\epsilon_1 + \langle\overrightarrow{u}|\epsilon_2\rangle\epsilon_2 = \frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{35}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$p\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{3x+z}{10}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{-x+5y+3z}{35}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z\\ -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}y + \frac{3}{7}z\\ \frac{3}{14}x + \frac{3}{7}y + \frac{5}{14}z\end{pmatrix}$$

La matrice de $p$ dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix}\frac{13}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14}\\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14}\end{pmatrix}$

**Exercice 5**

1. On sait que $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})^\perp$ et $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or, il est évident que la dimension de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est égale à 1 puisque $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) = \text{vect}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.
   Il suffit donc de trouver un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont l'intersection avec $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est réduite au vecteur nul.
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. On va montrer que $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})^\perp = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$.
   — Montrons que la famille $(M_1, M_2, M_3)$ est libre :
   On suppose qu'il existe $a, b, c$ trois réels tels que $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0$, soit $\begin{pmatrix}a & c\\b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, soit évidemment $a = b = c = 0$.
   Ainsi, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(M_1, M_2, M_3)$ est de dimension 3.
   — Montrons que l'intersection de ce sous-espace vectoriel avec $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est restreinte au vecteur nul :
   Soit $M \in \text{Vect}(M_1, M_2, M_3) \bigcap \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ : On a d'une part $M = \begin{pmatrix}a & c\\b & 0\end{pmatrix}$ et d'autre part $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \alpha\end{pmatrix}$ soit évidemment $M = 0$. Donc $\text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont l'intersection avec $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est restreinte au vecteur nul : on a bien $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})^\perp = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$

**2.** On pose $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ : la famille constituée du seul vecteur $M_0$ est une base de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ : elle devient orthonormale en posant $N_0 = \dfrac{M_0}{\|M_0\|}$ avec $\|M_0\|^2 = \text{Tr}\,({}^tM_0.M_0) = \text{Tr}\,M_0 = 2$, et donc $N_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}M_0$.

La projection orthogonale de $A$ sur $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est donc égale à $\langle A|N_0\rangle N_0 = \text{Tr}({}^tA.N_0)N_0$
$= \text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_0$

**Exercice 6**

**1. a.** Soit $p \in P$ : on doit montrer que pour toute fonction $i$ de $I$, on a $\langle p|i\rangle = 0$.
Or, $\langle p|i\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)i(t)\mathrm{d}t$. La fonction $p$ étant paire et la fonction $i$ étant impaire, la fonction $p \times i$ est impaire et donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)i(t)\mathrm{d}t = 0$ et donc $P \subset I^\perp$.

**b.** Soit $f \in E$ : Pour tout $t$ de $[-1,1]$, on pose $f(t) = p(t) + i(t))$ où $p(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ et $i(t) = \dfrac{p(t)-p(-t)}{2}$. On montre facilement que $p$ est paire et $i$ est impaire et donc $E = P + I$.
Supposons maintenant qu'il existe $f \in P\bigcap I$ : $f$ est paire et impaire donc pour tout réel $t$ de $[-1,1]$ on a $f(-t) = f(t)$ et $f(-t) = -f(t)$ donc $f(t) = -f(t)$ : $f = 0$ sur $[-1,1]$.
On a donc $\begin{cases} E = P + I \\ P\bigcap I = 0 \end{cases}$ donc $E = P \oplus I$.

**c.** Soit $f \in I^\perp$ : d'après la question précédente il existe un unique couple $(p,i) \in P \times I$ tel que $f = p + i$. Alors $\langle f|i\rangle = \langle p|i\rangle + \langle i|i\rangle$. Or, $\langle f|i\rangle = 0$ puisque $f \in I^\perp$ et on a montré à la question 1 que $\langle f|i\rangle = 0$ donc $\|i|^2 = 0$ et donc $i = 0$.
On a donc $f = p \in P$ et donc $I^\perp \subset P$.
Comme d'après la question précédente on a aussi $P \subset I^\perp$, on a bien $P = I^\perp$.

**2.** D'après les questions précédentes, le projeté orthogonal de $f$ sur $I$ est la fonction définie sur $[-1,1]$ par $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, soit la restriction de sh à $[-1,1]$ .

**Exercice 7**

Soit $E = R[X].\mathrm{e}^{-x} = \left\{P(x)\mathrm{e}^{-x}, P \in \mathbb{R}[X]\right\}$. Cet ensemble est clairement un espace vectoriel. Montrons que pour tout $(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x})$ de $E \times E$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ converge.
Soit $n$ le degré de $PQ$.
Au voisinage de $+\infty$, on a $P(x)Q(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ qui est du signe (constant) de $a_n$, on peut donc appliquer le critère d'équivalence : $P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-2x} \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n \mathrm{e}^{-2x}$.
Or, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a_n x^{n+2}\mathrm{e}^{-2x} = 0$ donc pour $x$ assez grand, $a_n x^{n+2}\mathrm{e}^{-2x} \leq 1$ et donc $a_n x^n \mathrm{e}^{-2x} \leq \dfrac{1}{x^2}$ dont l'intégrale de Riemann converge en $+\infty$.
D'après le critère de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} a_n x^n \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ converge et donc, d'après le critère d'équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ est convergente.
Montrons maintenant que l'application définie sur $E \times E$ par $\varphi\,(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $E$.

- $\forall\,(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x}) \in E \times E$, on a $\varphi\,(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x}) \in \mathbb{R}$.
- Il est évident que pour tout $(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x}) \in E \times E$, on a $\varphi\,(P\mathrm{e}^{-x}, Q\mathrm{e}^{-x}) = \varphi(Q(x)\mathrm{e}^{-x}, P(x)\mathrm{e}^{-x})$ donc <u>$\varphi$ est symétrique</u>.
- Soit $(P_1(x)\mathrm{e}^{-x}, P_2(x)\mathrm{e}^{-x}, Q(x)\mathrm{e}^{-x}) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale impropre et parce que toutes ces intégrales sont convergentes, on a

$\varphi(\lambda P_1(x)\mathrm{e}^{-x} + P_2(x)\mathrm{e}^{-x}, Q(x)\mathrm{e}^{-x}) = \lambda\varphi(P_1(x)\mathrm{e}^{-x}, Q(x)\mathrm{e}^{-x}) + \varphi(P_2(x)\mathrm{e}^{-x}, Q(x)\mathrm{e}^{-x})$ donc $\varphi$ est linéaire par rapport à la première variable et symétrique, donc bilinéaire.

— Soit $P(x)\mathrm{e}^{-x} \in E$ : la fonction qui à $x$ associe $P^2(x)\mathrm{e}^{-2x}$ est positive sur $[0,+\infty[$ donc $\varphi(P(x)\mathrm{e}^{-x}, P(x)\mathrm{e}^{-x}) \geq 0$ : $\varphi$ est positive.

— Soit $P(x)\mathrm{e}^{-x} \in E$ telle que $\varphi(P(x)\mathrm{e}^{-x}, P(x)\mathrm{e}^{-x}) = 0$ : la fonction qui à $x$ associe $P^2(x)\mathrm{e}^{-2x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\varphi(P(x)\mathrm{e}^{-x}, P(x)\mathrm{e}^{-x})$ est nulle si et seulement si la fonction $P^2(x)\mathrm{e}^{-2x}$ est nulle sur cet intervalle, soit $P = 0$. Donc $\varphi$ est définie.

Finalement, $\varphi$ est bien un produit scalaire sur $E$.
Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les vecteurs $\left(e_0 = \mathrm{e}^{-x}, e_1 = x\mathrm{e}^{-x}, e_2 = x^2\mathrm{e}^{-x}\right)$ : le minimum de la fonction $f$ est atteint et correspond au minimum du carré de la distance entre la fonction $x^3\mathrm{e}^{-x}$ et $F$ : il est donc atteint pour le projeté orthogonal de $x^3\mathrm{e}^{-x}$ sur $F$.
On cherche une base orthonormée de $F$ par la méthode d'orthonormalisation de Schmidt :

— On pose $\epsilon_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|}$ avec $\|e_0\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$, et on montre facilement que cette intégrale est égale à $\dfrac{1}{2}$.
On a donc $\epsilon_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}$.

— On pose $\epsilon_1' = e_1 - \varphi(e_1,\epsilon_0)\epsilon_0$ avec $\varphi(e_1,\epsilon_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{2}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (par exemple à l'aide d'une IPP).
On a donc $\epsilon_1' = x\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_0$ et on pose $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon_1'}{\|\epsilon_1'\|}$ avec $\|\epsilon_1'\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{8}$ (par exemple à l'aide de deux IPP successives).
On a donc $\epsilon_1 = 2\sqrt{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

— On pose $\epsilon_2' = e_2 - \varphi(e_2,\epsilon_0)\epsilon_0 - \varphi(e_2,\epsilon_1)\epsilon_1$ avec :
$\varphi(e_2,\epsilon_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
$\varphi(e_2,\epsilon_1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\sqrt{2}x^2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
On a donc $\epsilon_2' = x^2\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$
Ce vecteur est orthogonal à $\epsilon_0$ et $\epsilon_1$, et on pose $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2'\|}$ avec
$\|\epsilon_2'\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{8}$.
On a donc $\epsilon_2 = 2\sqrt{2}\left(x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Finalement, la famille $(\epsilon_0, \epsilon_0, \epsilon_0)$ est une base orthonormée de $F$.
On peut déterminer le projeté orthogonal de $x^3\mathrm{e}^{-x}$ sur $F$ :
il est égal à $p = \varphi\left(x^3,\epsilon_0\right)\epsilon_0 + \varphi\left(x^3,\epsilon_1\right)\epsilon_1 + \varphi\left(x^3,\epsilon_2\right)\epsilon_2$.
On montre après calcul que ce projeté est égal à $p = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}\epsilon_0 + \dfrac{9\sqrt{2}}{8}\epsilon_1 + \dfrac{9\sqrt{2}}{8}\epsilon_2$
$p = \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{9}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{9}{2}\left(x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(\dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{9}{2}x + \dfrac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}$
Le minimum est donc atteint pour $a = -\dfrac{9}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$ et $c = -\dfrac{3}{4}$, et est égal à :

$$\int_0^{+\infty} \left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{9}{32}.$$