Chapitre 11 : Espaces préhilbertiens réels

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire - norme

Définition 1 : produit scalaire

Soit $\langle .|. \rangle : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x|y\rangle \end{array}$ une application vérifiant :

1. $\langle .|. \rangle$ est symétrique (c'est-à-dire : $\forall (x,y)\in E^2, \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$).
2. $\langle .|. \rangle$ est bilinéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des variables).
3. $\langle .|. \rangle$ est positive (c'est-à-dire $\forall x\in E, \langle x|x\rangle \geq 0$).
4. $\langle .|. \rangle$ est définie (c'est-à-dire $\langle x|x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$).

Alors l'application $\langle .|. \rangle$ est appelée produit scalaire sur E.

Définition 2 : espace préhilbertien, espace euclidien

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.
Si, en outre, E est de dimension finie alors il est appelé espace euclidien.

Exemples 1
Dans chaque cas, montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{R}^n$ et $\langle x|y\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).
2. $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\langle X|Y\rangle = {}^t X.Y$
3. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t A.B\right)$
4. $E = \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ et $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$
5. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$
6. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Définition 3 : norme euclidienne

Soit $(E,\langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .|. \rangle$ l'application $\|.\| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} \end{array}$.

Propriété 1 : inégalié de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$.
Alors $\forall (x, y) \in E \times E$, on a $\left|\langle x|y\rangle\right| \leq \|x\|.\|y\|$
De plus, l'égalité est vraie si et seulement si x et y sont deux vecteurs liés.

Exemples 2

1. Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$
2. Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
   Montrer que $\left(\int_a^b t.f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \dfrac{b^3 - a^3}{3} \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$

Propriété 2 :conséquence sur la norme et inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$. On a alors :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
2. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\forall (x, y) \in E \times E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Propriété 3* : Identité du parallélogramme et formules de polarisation

Soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$. On a alors :

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
2. $\langle x|y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.
3. $\langle x|y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

Remarque
Il faut savoir retrouver ces formules.
L'identité du parallélogramme peut également se retenir à l'aide d'un dessin.

Les formules de polarisation permettent de retrouver l'expression du produit scalaire à partir de l'expression de la norme.

2 Orthogonalité

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4 : vecteurs orthogonaux

1. Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est égal à 0.
2. Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si elle est constituée de vecteurs orthogonaux deux à deux.

Exemple 3

1. Soit $E = \mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et $T-$périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que l'application définie par $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
   b. Soit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Montrer que les familles $\{\cos(n\omega t); n \in \mathbb{N}\}$ et $\left\{\sin(n\omega t); n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont orthogonales.
2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$
   a. Montrer que l'application définie par $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. est un produit scalaire sur E.
   b. Montrer que la famille $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1+\dfrac{3}{2}t, \dfrac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6}t + \dfrac{5}{4}\sqrt{6}t^2\right\}$ est une famille orthogonale.

Propriété 4 : familles orthogonales et familles libres

Toute famille orthogonale de E constituée de vecteurs non nuls est libre dans E.

Propriété 5 : théorème de Pythagore

Soit $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une famille orthogonale de E.
Alors $\|x_1 + x_2 + \ldots x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.

Remarque : Pour $n = 2$, la réciproque est vraie...

2.2 Famille orthonormale

Définition 5 : famille orthonormale

Une famille orthogonale de E dont tous les vecteurs ont pour norme 1 est appelée famille orthonormale de E.

Exemple 4

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.
   Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$ où
   $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1;0;1)$ et $w = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1;-;2;1)$.
2. On considère l'espace $\mathscr{C}^0([0;1]$ des fonctions continues sur $[0\ ;\ 1]$ muni que produit scalaire φ défini par $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que la famille $\{f_1; f_2\}$ est une famille orthonormale où f_1 et f_2 sont définies par $f_1(t) = 1$ et $f_2(t) = \sqrt{12}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Soit E l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que la famille $\{1, \sqrt{2}\cos(mt), \sqrt{2}\sin(nt) : (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$ est une famille orthonormale de E.

Propriété 6 : existence de familles orthonormales

Soit $(E, \langle.|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle.|.\rangle$.

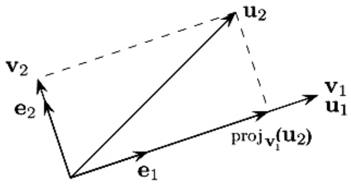
1. Soit $\{u_1, u_2, ..u_n\}$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ de E telle que :
   a. $\forall p \in \{1...n\}$, $\mathrm{Vect}(u_1, ...u_p) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.
   b. $\forall p \in \{1...n\}, \langle u_p|e_p\rangle > 0$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F possède une base orthonormale.

Remarque : on démontre l'existence d'une telle base par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.
Ce procédé est une méthode pour orthonormaliser une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. A partir d'une famille libre $(u_1, u_2, ..., u_n)$ on construit une famille orthogonale $(v_1, v_2, ..., v_n)$ qui engendre les mêmes espaces vectoriels successifs : pour tout $i \leqslant n$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_i) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_i)$.

Enfin, pour obtenir la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ orthonormale, il suffit de normer chaque vecteur u_i pour tout i de 1 à n.

— on norme le premier vecteur $e_1 = \dfrac{u_1}{\| u_1 \|}$

— pour obtenir u_2 on lui soustrait sa composante sur e_1



On obtient $v_2 = u_2 - \text{proj}_{e_1}(u_2)$ et $e_2 = \dfrac{v_2}{\| v_2 \|}$

— pour obtenir u_3 on lui soustrait ses composantes sur e_1 et sur e_2
Ainsi $v_3 = u_3 - \text{proj}_{e_1}(u_3) - \text{proj}_{e_2}(u_3)$ et $e_3 = \dfrac{v_3}{\| v_3 \|}$.

— et ainsi de suite ....

Il faut bien avoir en tête que si $(e_1, e_2, e_3, ..)e_n)$ est une famille orthonormale, la projection d'un vecteur u quelconque sur la droite engendrée par e_i est $\text{proj}_{e_i}(u) = \langle u | e_i \rangle e_i$

Exemples 5

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Soient $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ les vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que la famille $\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3}\}$ est une base de E.
   b. Orthonormaliser cette base en utilisant le procédé de Gramm-Schmidt.
2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$ les vecteurs de coordonnées $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que la famille $\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3}; \overrightarrow{u_4}\}$ est une base de E.
   b. Orthonormaliser cette base en utilisant le procédé de Gramm-Schmidt.
3. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel.
   a. Montrer que $\{(x; y; z; t) \in E; x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 3y + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et en déterminer une base $\{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\}$.
   b. Orthonormaliser cette base à l'aide du procédé de Gramm-Schmidt.
   c. Compléter cette base en une base orthonormale de E.
4. (*) Soit $E = R^3$. $\forall x = (x_1, x_2, x_3), \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in E$, on pose
   $\langle x | y \rangle = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.
   a. Montrer que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   b. A partir de la base canonique de E, former une base orthonormale de E pour $\langle . | . \rangle$.

5. (*) Soit $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit F le sous espace vectoriel de E des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2).
Orthonormaliser la base (e_0, e_1, e_2).

2.3 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 6 : orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle orthogonal de F et on note $F^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de F.

Propriété 7 : structure de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien muni de la norme euclidienne $\|.\|$ associée au produit scalaire $\langle .|.\rangle$ et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 7 : projecteur orthogonal

Soit $(E, \langle .|\rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, dont une base orthonormale est $\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$.

L'application $p_F : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x|\epsilon_i\rangle \epsilon_i \end{array}$ est un projecteur de E, d'image F et de noyau $F^{\perp}$.

Cette application p_F est appelée projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F.

Remarque :
L'application p_F est indépendante de la base orthonormale de F choisie.

Propriété 8 : somme directe et orthogonal

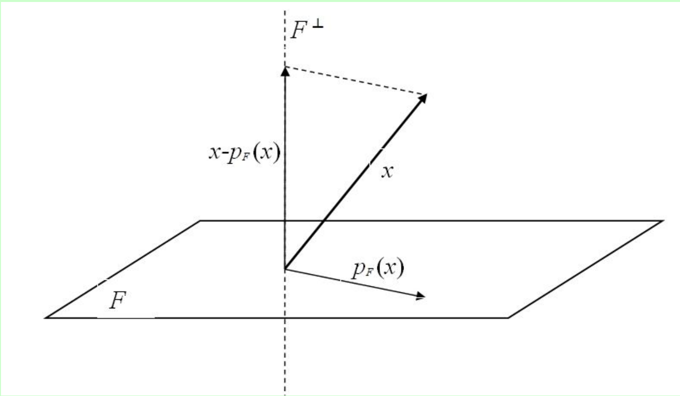
Soit $(E, \langle .|\rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exemple 6
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tA.B\right)$.
On considère les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.
Le but de l'exemple est de montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

1. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\langle A|S\rangle = 0$.
   En déduire que la somme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est directe.
2. Montrer que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et conclure.
3. Une autre méthode :
   a. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   b. Conclure.

Propriété 9 : caractérisation du projeté orthogonal

Soit $(E, \langle .|\rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$: $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x)$ soit orthogonal à tout vecteur de F.



Exemples 7

1. Soit E un espace euclidien, et u un vecteur unitaire de E. Soit $H = (\mathrm{Vect}\,u)^{\perp}$.
   Soit p la projection orthogonale sur H et et s la symétrie orthogonale par rapport à H.
   a. Montrer que : $\forall x \in E, p(x) = x - \langle x|u\rangle u$.
   b. Montrer que : $\forall x \in E, s(x) = x - 2\langle x|u\rangle u$.
   c. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$, et (Π) le plan d'équation cartésienne $x - y + z = 0$.
   Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur (Π) dans la base canonique.
2. (*) On reprend la situation de l'exemple 6.
   Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Définition 8 : distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Soit $(E,\langle.|\rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $x\in E$. On appelle distance de x à F, le nombre réel défini par :

$$d(x,F)=\operatorname{Inf}\{\|x-f\|;f\in F\}.$$

Propriété 10 : distance à un sous-espace et projeté orthogonal

Soit $(E,\langle.|\rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $x\in E$.

1. $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$
2. Soit $f\in F$. Si $d(x,f)=d(x,F)$ alors $f=p_F(x)$.
   $p_F(x)$ est l'unique vecteur qui réalise l'égalité $d(x,f)=d(x,F)$.

Exemple 8

1. On veut déterminer I=Inf$\left\{\int_0^\pi (t-a\cos t-b\sin t)^2\,\mathrm{d}t;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
   - **a.** Justifier que si l'on se place dans $E=\mathscr{C}([0;\pi],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, on a $I=d(x,F)$ avec $x:t\mapsto t$ et F =Vect(cos,sin).
   - **b.** Montrer que la famille (cos,sin) est une base orthogonale de F.
   - **c.** Orthonormaliser cette base et en déduire que $I=\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{8}{\pi}-2\pi$.
2. (*) Déterminer Inf$\left\{\int_0^1 \left(t^2-at-b\right)^2\,\mathrm{d}t;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.