- BECEAS Mathématiques - Corrigé rapide -

Catherine Aymard

25 mai 2021

Exercice 1 : une caractérisation de la loi géométrique

1. I et M sont des variables aléatoires comme fonctions de variables aléatoires.
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k \wedge Y \geq k).$$
Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc
$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2.$$
X suivant une loi géométrique de paramètre p, et en posant $q = 1 - p$ on déduit
$$\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2(k-1)}.$$
Donc $\mathbb{P}(I = k) = \mathbb{P}(I \geq k) - \mathbb{P}(I \geq k+1) = q^{2(k-1)}(1-q^2)$. Ainsi $I \sim \mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

   (b) *On note une coquille dans l'énoncé : le couple* (i, d) *est à prendre dans* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i, M = d + i)$.
   — Si $d = 0$, $\mathbb{P}(I = i, M = d+i) = \mathbb{P}(I = i, M = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \mathbb{P}(X = i)^2 = q^{2(i-1)}p^2$.
   — Si $d \neq 0$, $\mathbb{P}(I = i, M = d+i) = \mathbb{P}((X = i, Y = d+i) \vee (X = d+i, Y = i)) = 2\mathbb{P}(X = i, Y = d+i)$ $2\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = d+i) = 2q^{d+2(i-1)}p^2$.

   (c) Les événements $(I = i)_{iin\mathbb{N}^*}$ formant un système complet, on a $\mathbb{P}(D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(I = i, D = d)$.
En distinguant les deux cas précédents :
   — $\mathbb{P}(D = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)}p^2 = \dfrac{p}{1+q}$.
   — Si $d \neq 0$, $\mathbb{P}(D = d) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2q^{d+2(i-1)}p^2 = \dfrac{2q}{1+q}$.

   (d) En reprenant les valeurs obtenues ci-dessus, on vérifie que pour tous les couples $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(D = d)$. Les deux variables sont indépendantes.
3. (a) $\mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^2$

(b) On reprend le même calcul qu'au (2.b)

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k \wedge Y > k).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

(c) On calcule de deux manières différentes $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$.

— D'une part, $\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(X = Y, X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2$.

— D'autre part, comme I et D sont indépendantes, $\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(I > k)\,\mathbb{P}(D = 0) = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2$.

On conclut donc que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

(d) i. On fait la différence des égalités ci-dessus pour k et $k-1$:

$$p_k^2 = bp_k\left(p_k + 2\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)\right) = bp_k\left(p_k + 2\mathbb{P}(X > k)\right),$$

ce qui, puisque les p_k sont non nuls, peut se réécrire

$$p_k(1-b) = 2b\mathbb{P}(X > k).$$

ii. La formule ci-dessus, pour $k = 1$, donne $(1-b)p_1 = 2b(1-p_1)$, c'est-à-dire $p_1 = \dfrac{2b}{1-b}$. En reprenant ensuite cette formule pour k et $k-1$ et en les soustrayant, il vient $(1-b)\,p_k = (1+b)\,p_{k+1}$.

(e) Ainsi, la suite (p_k) est une suite géométrique. $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)$.

Exercice 2 : un calcul de $\zeta(2)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $C_{n-1} - C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$.
   On effectue une intégration par parties :

$$u' = \sin(x)\cos^{2n-2}(x), \quad u = -\frac{\cos^{2n-1}(x)}{2n-1}, \quad v = \sin(x), \quad v' = \cos(x)$$

   et l'on obtient $C_{n-1} - C_n = \dfrac{C_n}{2n-1}$.

2. Cette dernière égalité conduit à $\dfrac{C_n}{2n-1} = \dfrac{C_{n-1}}{2n}$, d'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{C_n}{2n-1} = \dfrac{C_{n-1}}{2n}$.

3. Une double intégration par parties à partir de C_n conduit à $C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n$.

4. Pour $n \neq 0$, comme $C_n \neq 0$, on tire de l'égalité précédente $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)$.

5. (a) Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin$ est concave, donc sa courbe est au dessus de sa corde.

   (b) Ainsi $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{C_n}{2n+2}$.

6. On déduit de l'inégalité précédente que $\dfrac{D_n}{C_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On somme les égalités du (4) et après télescopage et passage à la limite, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{D_0}{C_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 : trois preuves d'une égalité combinatoire

1. (a) *On note une coquille dans l'énoncé : le couple* (n,p) *est à prendre dans* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   On intègre par parties :

$$B\left(n,p\right) = \int_0^1 t^n(1-t)^p\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_0^1 + \int_0^1 p\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{n+1}B\left(n+1,p-1\right).$$

   À partir de cette relation, on obtient par récurrence que

$$\forall k \leqslant p, B\left(n,p\right) = p\dots(p-k+1)\frac{n!}{(n+k)!}B\left(n+k,p-k\right).$$

   Pour $k=p$, $B\left(n,p\right) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p)!}B(n+p,0) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$\frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k}.$$

2. (a) On montre par récurrence sur n la relation demandée.

   — Pour $n=0$, soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^0(u)_p = u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{1}{k}(-1)^k u_{p+k}$.

   — Supposons maintenant le résultat à un certain rang $n \geqslant 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \Delta^n(\Delta(u))_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta(u)_{p+k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(u_{p+k+1}-u_{p+k}).$$

   Après décalage d'indice et utilisation de la formule de Pascal, on obtient :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}u_{p+k}.$$

   La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout n.

(b) Prenons la suite $u = \left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$. D'une part, par récurrence sur n, on obtient que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta^n(u)_p = \frac{(p-1)!n!}{(p+n)!}(-1)^n.$$

D'autre part, la question (2.a.) donne

$$\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{p+k}.$$

En égalant les deux termes, on obtient l'égalité $(\mathcal{E})$.

3. (a) Posons $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i^c\right).$$

On applique la formule du crible au dernier terme de la somme et l'on obtient le résultat demandé.

(b) Soit S l'ensemble des $(m+n)$-suites de valeurs distinctes dans $\{B_1, \ldots, B_n, N, R_1, \ldots, R_{m-1}\}$. S est de cardinal $(m+n)!$. Soit T l'ensemble des suites où tous les R_i apparaissent après le N. Considérons l'application φ qui à un élément s de S associe l'élément s' de T obtenu en permutant N et le premier R_i de s s'il y a un R_i avant N et s sinon. φ est surjective et chaque élément de T admet m antécédents par φ, ceux que l'on obtient en permutant N avec chacun des R_i. D'après le lemme des bergers, on déduit que $\#S = m\#T$ donc $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{m}$.

(c) L'événement $B \cap A$ correspond aux cas où l'on tire toutes les boules blanches (il y a $n!$ façons de le faire), puis la boule noire, puis toutes les boules rouges ($(m-1)!$ façons). Le nombre total de façons d'effectuer le tirage est $(m+n)!$. Donc $\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{(m-1)!\,n!}{(m+n)!}$.

(d) On réitère la démarche du (3.b.) en considérant que les B_{i_j} sont des R, donc en faisant comme s'il y avait $m+k$ boules rouges. On obtient donc le résultat souhaité.

(e) i. Les k-suites de ce type sont en bijection avec les parties à k éléments d'un ensemble de n éléments. Elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$.

ii. On reporte les quantités trouvées ci-dessus dans la formule du (3.a.) et on retrouve alors $(\mathcal{E})$.

Exercice 4 : une propriété des matrices symétriques

1. Soit $(A, B) \in SO_n(\mathbb{R})^2$, soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T B P$. L'application $X \mapsto PX$ définit une bijection de $S(0,1)$ dans lui-même. Donc

$$R(B) = \{X^T B X, X^T X = 1\} = \{(PX)^T B P X, X^T X = 1\} = \{X^T P^T B X, X^T P X = 1\} = R(A).$$

2. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Elle est donc orthogonalement semblable à $B = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit X telle que $X^T X = 1$. $X^T B X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$, avec $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Donc $R(A) = R(B) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

(b) Considérons l'application X définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $X : \theta \mapsto (\cos(\theta), 0, \ldots, 0, \sin(\theta))^T$. Elle est continue à valeurs dans $S(0,1)$. $\theta \mapsto X(\theta)^T B X(\theta)$ est continue, vaut λ_1 en 0 et λ_n en $\frac{\pi}{2}$. Donc $R(A) = R(B) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

(c) $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ donc, si $\operatorname{Tr} A = 0$, alors $\lambda_1 \leqslant 0$ et $\lambda_n \geqslant 0$. Donc $0 \in R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, si $A = Diag(-1, 0, 2)$, $0 \in R(A)$ mais $\operatorname{Tr} A = 1 \neq 0$.

3. Supposons que $P^T A P$ ait pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$. Prenons X tel que $X = P^{-1}(1, 0, \ldots, 0)^T$. Alors $(PX)^T A (PX) = \operatorname{Tr} A$. Donc $\operatorname{Tr} A \in R(A)$.

4. (a) Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Donc $\operatorname{Tr} A = 4 \notin \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] = R(A)$.

(b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres λ_1 et λ_2. $\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$. $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

Ainsi, $\operatorname{Tr} A \in R(A) \iff \lambda_1 \leqslant 0 \wedge \lambda_2 \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $0 \in R(A)$.

5. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Alors $0 \in R(A)$ et $\det(A) \leqslant 0$.

Considérons $B = \begin{pmatrix} Tr(A) & \sqrt{-\det(A)} \\ \sqrt{-\det(A)} & 0 \end{pmatrix}$. A et B sont symétriques et ont le même polynôme caractéristique. Elles sont donc toutes les deux orthogonalement semblables à la même matrice diagonale. Elles sont donc orthogonalement semblables entre elles.

6. (a) Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$. Soit X de norme 1 telle que $X^T A X = Tr(A)$, on complète X en une base orthonormée. Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. P est orthogonale et $P^T A P$ est de la forme $\begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.

(b) Par conservation de la trace par similitude, $\operatorname{Tr} B = 0$. D'après la question (1.c.), on déduit que $\operatorname{Tr} B \in R(B)$.

(c) On applique à B la propriété supposée dans cette question : il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T B Q$ soit de diagonale nulle. Posons alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. $P \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ et $P^T A P$ a pour diagonale $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

On a ainsi montré par récurrence que toute matrice A telle que $\operatorname{Tr} A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est $(\operatorname{Tr} A, 0, \ldots, 0)$.

7. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. $A - \frac{tr(A)}{n} I_n$ a une trace nulle, elle est donc, d'après le (5.c.) orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle. A est donc orthogonalement semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont égaux à $\frac{\operatorname{Tr} A}{n}$.