

I Décharge et charge d'un condensateur

I.A—

Q1. Les solutions de l'équation linéaire homogène (I1), sont les fonctions $\varphi_A : x \mapsto A e^{-t/\tau}$.

La fonction u est la fonction $\varphi_{u_0} : t \mapsto u_0 e^{-t/\tau}$ où u_0 la constante strictement positive définie dans l'énoncé.

Q2. On demande de résoudre l'inéquation $u(t) \leq \frac{1}{10} u_0$ i.e. $u_0 e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} u_0$. Résolvons cette inéquation :

$$u_0 e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} u_0 \quad \text{ssi} \quad e^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10} \quad (\text{puisque } u_0 \neq 0) \quad \text{ssi} \quad \frac{-t}{\tau} \leq \ln \frac{1}{10} \quad \text{i.e.} \quad \frac{-t}{\tau} \leq -\ln 10 \quad \text{et il vient : } t \geq \tau \ln 10$$

C'est à partir de l'instant $t_1 = \tau \ln 10$, que la tension $u(t)$ devient inférieure à 10% de sa valeur initiale u_0 .

I.B—

Q3. Calculons les solutions de l'équation avec second membre (I2).

Nous avons déterminé les solutions de l'équation homogène, à la question (Q1). Par ailleurs il y a une solution évidente constante $y_0(t) = U$ de l'équation complète. Alors les solutions de l'équation (I2) sont les fonctions :

$$f_A : t \mapsto U + A e^{-t/\tau}$$

— Pour $t \leq t_1$ on a vu que $u = \varphi_{u_0}$. De plus, au temps t_1 on a $u(t_1) = \frac{1}{10} u_0$.

— Enfin, pour $t \geq t_1$, $u(t)$ vérifie l'équation (I2), c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \geq t_1, u(t) = f_A(t)$

On doit avoir $f_A(t_1) = \frac{1}{10} u_0$, d'où $U + A e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{10} u_0$, qui donne $U + A \frac{1}{10} = \frac{1}{10} u_0$ et donc : $A = u_0 - 10 U$.

On a donc : $\forall t \geq t_1, u(t) = U + (u_0 - 10 U) e^{-t/\tau}$.

Rem. — Voici d'autres expressions de $u(t)$ (en utilisant que $10 = e^{t_1/\tau}$), valables pour $t \geq t_1$:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau} + U [1 - e^{-(t-t_1)/\tau}] = \frac{u_0}{10} e^{-(t-t_1)/\tau} + U [1 - e^{-(t-t_1)/\tau}] \quad \text{ou encore} \quad U + \left(\frac{u_0}{10} - U\right) e^{-(t-t_1)/\tau}$$

Q4. Pour $t \leq t_1$, on a $u(t) = u_0 e^{-t/\tau}$: on reconnaît une « exponentielle décroissante ».

Pour $t \geq t_1$, on a $u(t) = U + (u_0 - 10 U) e^{-t/\tau}$ qui varie comme son second terme $(u_0 - 10 U) e^{-t/\tau}$

— Si $U < \frac{u_0}{10}$, on a $u_0 - 10 U > 0$ et donc la fonction u est croissante sur $[t_1, +\infty[$.

— Si $U = \frac{u_0}{10}$, la fonction u est constante de valeur U .

— Si $U > \frac{u_0}{10}$, on a $u_0 - 10 U < 0$ donc la fonction u est décroissante.

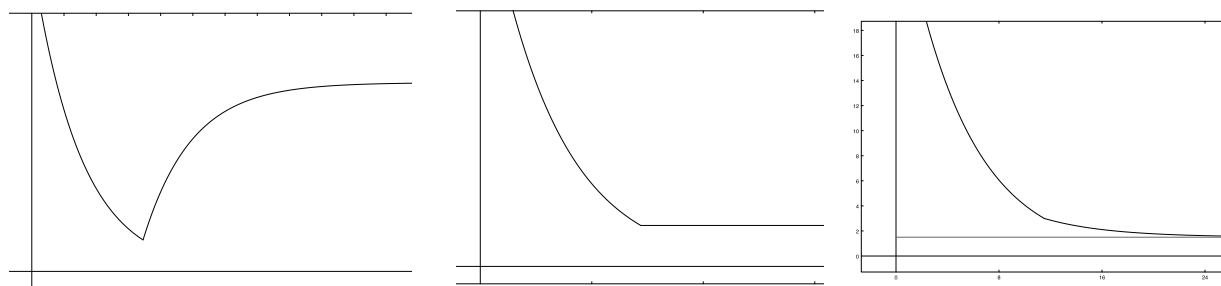
Dans tous les cas,

— La dérivée à gauche en t_1 est $u'_g(t_1) = \frac{-1}{\tau} u_0 e^{-t_1/\tau} = -\frac{1}{\tau} \frac{u_0}{10}$.

— La dérivée à droite en t_1 est $u'_d(t_1) = \frac{-1}{\tau} (u_0 - 10 U) e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{\tau} \left(U - \frac{u_0}{10}\right)$ puisque $e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{10}$.

— La limite en $+\infty$ est U

Q5. Par exemple



I.C—

Q6. Pour $t \in [0, t_1]$, on a $\int_0^t C u(s) u'(s) ds = C \left[\frac{1}{2} u(s)^2 \right]_0^t = \frac{1}{2} C u(t)^2 - \frac{1}{2} C u_0^2$ d'où $E(t) = \frac{1}{2} C u(t)^2$.

En particulier : $E(t_1) = \frac{1}{2} C \frac{u_0^2}{100}$.

Q7. Pour $t \geq t_1$, on a aussi $\int_{t_1}^t C u(s) u'(s) ds = C \left[\frac{1}{2} u(s)^2 \right]_{t_1}^t = \frac{1}{2} C u(t)^2 - \frac{1}{2} C u(t_1)^2$ et donc $E(t) = \frac{1}{2} C u(t)^2$.

Q8. On a vu plus haut que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u = U$, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} E = \frac{1}{2} C U^2$.

II la méthode d'Euler

II.A — Résultats préliminaires

II.A.1)

Q9. Considérons la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$. Elle est partout dérivable, et l'on a $\varphi'(x) = 1 - e^{-x}$. C'est une fonction strictement croissante, et puisque $\varphi'(0) = 0$: φ' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ atteint donc un minimum en $x = 0$, et puisque $\varphi(0) = 0$, on a démontré : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$ i.e. $e^{-x} \geq 1 - x$.

Q10. La représentation graphique de l'exponentielle décroissante $x \mapsto e^{-x}$, est donc en tout point au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 - x$.

II.A.2)

Q11. Une telle propriété est bien entendu du cours de première année, mais il faut bien comprendre que l'énoncé en demande une (re-)démonstration. Il faut reconnaître le taux d'accroissement de la fonction $t \mapsto \ln t$ en $t = 1$:

$$\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln 1}{(1+\varepsilon) - 1} \rightarrow \ln'(1) = 1$$

Q12. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$ et donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de cette limite, il vient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{x}{n} \right| < \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire : } -\frac{1}{2} < \frac{x}{n} < \frac{1}{2}$$

Q13. Notons $\varepsilon_n = \frac{x}{n}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. La quantité $\ln(1+\varepsilon_n)$ est bien défini pour $n \geq N$, puisqu'alors $1+\varepsilon_n > 0$. par composition des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$. Puis : $u_n = \frac{\ln(1+x/n)}{1/n} = x \frac{\ln(1+x/n)}{x/n} = x \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$ a pour limite x quand $n \rightarrow +\infty$ (produit des limites).

Q14. Par définition des puissances généralisées : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{x}{n})} = e^{u_n}$ en notant $u_n = \frac{\ln(1+x/n)}{1/n}$ (comme ci-dessus). Alors par continuité de l'exponentielle : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

II.A.3)

Q15. Utilisons un développement limité : $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ donne $e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. On en déduit :

$$e^{-x} - 1 + x \sim_0 \frac{x^2}{2}, \quad 1 - e^{-x} \sim_0 x, \quad \frac{e^{-x} - 1 + x}{1 - e^{-x}} \sim_0 \frac{x}{2} \quad \text{et donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{1 - e^{-x}} = 0.$$

II.B — Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Q16. Les solutions de l'équation différentielle étant les fonctions $y(t) = Ae^{-\lambda t}$, si on impose $y(0) = c$ on obtient la fonction : $f(t) = ce^{-\lambda t}$. Cette fonction est solution sur l'intervalle $\mathbb{R}$ tout entier, mais suivant l'énoncé, $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Q17. La droite passe par le point (t_n, y_n) et donc une équation de D_n est de la forme $y = y_n + \alpha_n(t - t_n)$. Le réel α_n est le coefficient directeur, donné dans l'énoncé, et on obtient l'équation : $y = y_n - \lambda y_n(t - t_n)$.

Q18. La valeur y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1} d'où, en utilisant que $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y_{n+1} = y_n - \lambda y_n(t_{n+1} - t_n) = y_n - \lambda y_n h = y_n(1 - \lambda h)$$

Q19. Dans cette question, afin de produire une illustration graphique, on considère $f(t) = e^{-t}$ sur le segment $[0, 1]$.

Q20. Depuis la question (Q18) nous savons que la suite $(y_0, \dots, y_N)$ est en progression géométrique, de raison $q = 1 - \lambda h = 1 - \frac{\lambda T}{N}$. Alors pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $y_n = y_0 \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^n = c \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^n$.

Q21. La valeur approchée y_N de $f(T)$ est donc : $y_N = c \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N$. La suite $N \mapsto \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N$ est du type $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ et nous avons trouvé sa limite à la question (Q14) : elle tend vers $e^x = e^{-\lambda T}$.

II.C — Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

Q22. Calculons $\varepsilon_n(h) = f(t_n) - (1 - \lambda h)f(t_{n-1})$:

$$\varepsilon_n(h) = ce^{-\lambda(t_{n-1}+h)} - (1 - \lambda h)ce^{-\lambda t_{n-1}} = ce^{-\lambda t_{n-1}}[e^{-\lambda h} - (1 - \lambda h)]$$

Q23. Nous avons vu à la question (Q9) : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - 1 + x \geq 0$. Alors $e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h \geq 0$, et donc : $\varepsilon_n(h) \geq 0$.

Q24. Puisque les $\varepsilon_n(h)$ sont positifs, on a $|\varepsilon_n(h)| = \varepsilon_n(h) = ce^{-\lambda t_{n-1}} \varphi(h)$ où l'on note $\varphi(h) = e^{-\lambda h} - (1 - \lambda h)$:

$$\varepsilon(h) = \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n(h)| = |c| \varphi(h) \sum_{n=1}^N e^{-\lambda t_{n-1}} = |c| \varphi(h) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda kh} = |c| \varphi(h) \frac{1 - e^{-\lambda Nh}}{1 - e^{-\lambda h}} = |c| \varphi(h) \frac{1 - e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

Q25. Faisons apparaître l'expression vue à la question (Q15) :

$$\varepsilon(h) = |c| \frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{1 - e^{-\lambda h}} [1 - e^{-\lambda T}] \quad \text{et donc (produit des limites : } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = |c| \cdot 0 \cdot [1 - e^{-\lambda T}] = 0$$

II.D — Étude de la stabilité du schéma d'approximation

II.D.1)

Q26. Le pas du schéma d'approximation est un réel $h > 0$, et depuis le début de la partie II, l'énoncé a fixé un réel $\lambda > 0$. Alors on a $1-a \neq 0$ et donc r est bien défini.

Q27. On a $z_{n+1} = az_n + \eta$ et $y_{n+1} = ay_n$, alors il vient :

$$z_{n+1} - y_{n+1} = az_n + \eta - ay_n = a[z_n - y_n] + \eta \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} = au_n + \eta$$

Q28. Le réel r vérifie $r = ar + \eta$, et donc :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - r = (au_n + \eta) - (ar + \eta) = au_n - ar = a(u_n - r) = av_n$$

On en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n = (u_0 - r)a^n = \left[z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}\right] a^n$.

Alors :

$$u_n = v_n + r = \left[z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}\right] a^n + \frac{\eta}{1-a}.$$

II.D.2)

Q29. On suppose $u_0 \neq r$, c'est-à-dire que la quantité $C = z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}$ est non nulle. On a : $u_n = C a^n + \frac{\eta}{1-a}$.

— Si $|a| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |C a^n| + \left|\frac{\eta}{1-a}\right|$ (inégalité triangulaire), d'où :

$$|u_n| = |C| |a|^n + \left|\frac{\eta}{1-a}\right| \leq |C| + \left|\frac{\eta}{1-a}\right|$$

Ainsi la suite (u_n) est bornée par $M = |C| + \left|\frac{\eta}{1-a}\right|$.

— Réciproquement, démontrons : si la suite (u_n) est bornée, alors $|a| \leq 1$. Choisissons de démontrer cet énoncé sous sa forme contraposée, qui s'énonce : « si $|a| > 1$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée ». Supposons donc $|a| > 1$. Par la seconde inégalité triangulaire : $|u_n| \geq |C a^n| - \left|\frac{\eta}{1-a}\right| = |C| \cdot |a|^n - \left|\frac{\eta}{1-a}\right|$. Puisque $|c| \cdot |a|^n \rightarrow +\infty$, on a aussi $|u_n| \rightarrow +\infty$: la suite (u_n) n'est donc pas bornée.

Q30. Traduisons la condition $|a| \leq 1$ obtenue plus haut : $|1 - \lambda h| \leq 1$, ou plus clairement $-1 \leq 1 - \lambda h \leq 1$, ou encore de façon équivalente $-1 \leq \lambda h - 1 \leq 1$, soit enfin (puisque λ et h sont > 0) :

$$\lambda h \leq 2$$

Pour un tel couple (λ, h) , la suite (u_n) est bornée (sans aucune condition portant sur l'erreur d'arrondi η).

II.D.3)

Q31. Dans cette question, nous avons $u_n = \frac{\eta}{1-a} - \eta \frac{a^n}{1-a}$ et $f(t_n) = f(nh) = e^{-100nh}$.

— Pour tout $h > 0$, la suite $(f(t_n))_n$ est bornée puisque de limite finie (égale à 0).

— Mais par exemple pour $h = 1$, il vient $|a| = 99 > 1$: la suite (u_n) n'est pas bornée.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A — Étude d'un système différentiel

III.A.1)

Q32. Soit $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, le système différentiel est équivalent à $Y'(t) = AY(t)$, si l'on pose : $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Q33. La matrice A est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

Q34. Calculons le polynôme caractéristique de A . Pour cela, notons $B = 2A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det \frac{1}{2}(2\lambda I - B) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2\lambda + 3 & -1 \\ -1 & 2\lambda + 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}[(2\lambda + 3)^2 - 1] = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$\Delta = 9 - 8 = 1$, et donc χ_A admet deux racines distinctes, $\lambda_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $\lambda_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Alors la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D$.

Q35. La fonction $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ est solution du système différentiel $X'(t) = DX(t)$, ssi $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) \\ x_2'(t) = -2x_2(t) \end{cases}$, ssi il existe donc deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} x_1(t) = Ae^{-t} \\ x_2(t) = Be^{-2t} \end{cases}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III.A.2)

Q36. Soit un réel $h > 0$, le scalaire $\frac{1}{h}$ n'étant pas valeur propre de A , la matrice $\frac{1}{h}I - A$ est inversible. Alors si B vérifie $(\frac{1}{h}I - A)B = I_2$ on a aussi $\frac{1}{h}(I - hA)B = I_2$. La matrice $I - hA$ est donc inversible (d'inverse $\frac{1}{h}B$).

Q37. Reprenons la matrice de passage P de la question (Q34).

$$I - hA = I - hP^{-1}DP = P^{-1}(I - hD)P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+2h \end{pmatrix} P$$

La matrice $C_h = I - hD = \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+2h \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $C_h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix}$. Alors :

$$B_h = (I - hA)^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+2h \end{pmatrix}^{-1} P = P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix} P$$

La matrice B_h est donc semblable à la matrice $\Delta_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix}$, Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_h^n est semblable à :

$$\Delta_h^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2h} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix}$$

Q38. Pour tout vecteur $U = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, notons $PU = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$, on a $B_h^n U = P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{a'}{(1+h)^n} \\ \frac{b'}{(1+2h)^n} \end{bmatrix}$. Les deux suites $\frac{a'}{(1+h)^n}$ et $\frac{b'}{(1+2h)^n}$

tendent vers 0, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_h^n U = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

III.B — Méthode d'Euler

Q39. La fonction F étant une solution du système différentiel (III.2), elle est dérivable en tout point $t \in]0, T[$, dérivable à droite en 0, dérivable à gauche en T . Pour tout $t \in]0, T[$ on a donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(t-h)}{t - (t-h)} = F'(t)$$

Q40. Lorsque le pas d'approximation h est suffisamment petit, on a $\frac{1}{h}(F(t_n) - F(t_{n-1})) \approx F'(t_n) = AF(t_n)$.

Le schéma d'Euler consiste à calculer des valeurs approchées Y_n des vecteurs $F(t_n)$, en calculant les Y_n ainsi :

$$\frac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1}) = AY_n \quad \text{pour tout } n \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

Il vient $(I - hA)A_n = A_{n-1}$ pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$. De façon équivalente, $(I - hA)A_{n+1} = A_n$ pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

Q41. Puisque la matrice $I - hA$ est inversible d'inverse B_h , il vient $A_{n+1} = B_h A_n$ pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Alors :

$$A_n = B_h^n A_0 \quad \text{pour tout } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

En particulier :

$$A_N = B_h^N A_0.$$

Q42. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = Z_{n+1} - Y_{n+1} = (B_h Z_n + V) - B_h Y_n = B_h(Z_n - Y_n) + V = B_h U_n + V$.

Q43. Les valeurs propres de B_h sont $\frac{1}{1+h}$ et $\frac{1}{1+2h}$ (question Q37). En particulier le réel 1 n'est pas valeur propre : La matrice $I - B_h$ est inversible.

Q44. Avec les notation de l'énoncé :

$$U_{n+1} - B_h U_n = V = (I - B_h)U_\infty \quad \text{et donc} \quad U_{n+1} - U_\infty = B_h U_n - B_h U_\infty = B_h(U_n - U_\infty)$$

Q45. La suite (V_n) définie par $V_n = U_n - U_\infty$ est géométrique, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = B_h^n V_0 = B_h^n (U_0 - U_\infty)$. Alors :

$$U_n = U_\infty + B_h^n U_0 - B_h^n U_\infty = (I - B_h^n)U_\infty + B_h^n U_0$$

Q46. On a $U_n = U_\infty - B_h^n U_\infty + B_h^n U_0$. En utilisant la question (Q38) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_h^n U_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_h^n U_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

La suite (U_n) converge dans $\mathbb{R}^2$, c'est donc une suite bornée de vecteurs.

