I Matrices compagnons

I - A — Étude d'un premier exemple

Q1. Calculons le polynôme caractéristique de A, en développant par rapport à la 3^è colonne :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2 - \lambda + (\lambda-2)\lambda^2 \\ &= -(\lambda-2) + (\lambda-2)\lambda^2 = (\lambda-2)(\lambda^2-1)\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$.

Q2. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, soit dans l'ordre croissant : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable, donc A est diagonalisable. Calculons une base de vecteurs propres :

$$\begin{aligned}\ker(\lambda_1 I - A) : \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} & \text{ssi } L_2 - L_1 \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} & \text{ssi } \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases}, \text{ base : } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \ker(\lambda_2 I - A) : \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} & \text{ssi } L_2 + L_1 \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} & \text{ssi } \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}, \text{ base : } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \ker(\lambda_3 I - A) : \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} & \text{ssi } \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}, \text{ base : } \vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On sait qu'alors la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ propre pour A, et donc :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I - B — Étude d'un second exemple

Q3. Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = -1 + 3\lambda + (\lambda-3)\lambda^2 \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)^3$. La matrice n'a qu'un sous-espace propre :

$$\ker(I - B) : \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \text{ssi } L_2 + L_1 \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}, \text{ base : } \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B n'a qu'un sous-espace propre, c'est $\ker(I - B) = \text{vect } \vec{v}_1$ (défini ci-dessus).

Q4. La dimension du sous-espace propre $\ker(I - B)$ est strictement inférieur à l'exposant de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique, et donc : B n'est pas diagonalisable.

En revanche, le polynôme caractéristique de B est scindé sur $\mathbb{R}$, donc la matrice B est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Q5. Soit donc un vecteur colonne $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où :

$$Bv_2 = v_1 + v_2 \text{ ssi } (B - I_3)v_2 = v_1 \text{ ssi } \begin{cases} -x + 0y + 1 \cdot 0 = 1 \\ x - y - 3 \cdot 0 = -2 \\ y + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -x = 1 \\ x - y = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = -1 \\ x - y = -2 \\ y = 1 \end{cases}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q6. Soit donc un vecteur colonne $v_3 = \begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$Bv_3 = v_2 + v_3 \text{ ssi } (B - I_3)v_3 = v_2 \text{ ssi } \begin{cases} -z + 0t + 1 \cdot 0 = -1 \\ z - t - 3 \cdot 0 = 1 \\ t + 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -z = -1 \\ z - t = 1 \\ t = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} z = 1 \\ z - t = 1 \\ t = 0 \end{cases}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q7. Soit la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Il suffit de permuter certaines colonnes pour obtenir une matrice échelonnée : la matrice R est inversible, c'est-à-dire que la famille $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Or, l'on a :

$$Bv_1 = v_1 \text{ puisque } v_1 \text{ est propre pour la valeur propre } 1$$

$$Bv_2 = v_1 + v_2 \text{ et } Bv_3 = v_2 + v_3 \text{ par définition des vecteurs } \vec{v}_2, \vec{v}_3$$

D'où, facilement : $R^{-1}BR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est la matrice T de l'énoncé. Finalement :

$$\text{En posant } R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ il vient } B = RTR^{-1}.$$

I - C — Retour au cas général

Q8. Montrons par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels $a_1, \dots, a_p$, en posant $C_p = C(a_1, \dots, a_p)$:

$$\chi_{C_p}(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \dots - a_2 X - a_1.$$

— $p=1$: on a $C_1 = (a_1)$, $\lambda I_1 - C_1 = (\lambda - a_1)$, d'où $\chi_{C_1}(X) = X - a_1$, c'est bien la propriété pour $p=1$

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang p , et considérons des réels $a_1, \dots, a_p, a_{p+1}$. En posant $C_{p+1} = C(a_1, \dots, a_p, a_{p+1})$, il vient (en développant par rapport à la 1re ligne) :

$$\chi_{C_{p+1}}(X) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda & a_p \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + a_{p+1} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_2 \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda & a_p \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + a_{p+1} \end{vmatrix} + (-1)^{1+p+1} a_1 \begin{vmatrix} -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \chi_{C(a_2, \dots, a_{p+1})}(\lambda) + (-1)^{1+p+1} a_1 (-1)^p$$

$$= \lambda \cdot (\lambda^p - a_p \lambda^{p-1} - \dots - a_3 \lambda - a_2) - a_1$$

$$= \lambda^{p+1} - a_{p+1} \lambda^p - \dots - a_2 \lambda - a_1 \text{ qui est bien l'expression attendue au rang } p+1.$$

Q9. Soit λ un réel, formons la matrice $C - \lambda I_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda & a_{p-1} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + a_p \end{pmatrix}$. Les $p-1$ premières colonnes

forment une famille échelonnée, donc libre, de $\text{Im}(C - \lambda I_p)$, d'où $\text{rg}(C - \lambda I_p) \geq (p-1)$. Alors en appliquant à la matrice $C - \lambda I_p$ le théorème du rang : $\dim \ker(C - \lambda I_p) \leq 1$. Autrement dit, si λ est une valeur propre de C , on a $\dim \ker(C - \lambda I_p) = 1$. Les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

Q10. Si le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est scindé à racines simples, d'après le cours on sait que cette matrice est diagonalisable.

Réciproquement, prenons pour C une matrice compagnon diagonalisable. On sait qu'alors, en notant $\mu_1, \dots, \mu_k$ les valeurs propres distinctes, et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives :

$$\chi_C(X) = \prod_{i=1}^k (X - \mu_i)^{m_i}.$$

On vient de voir : $\forall i, m_i = 1$ (question 8). D'où $\chi_C(X) = \prod_{i=1}^k (X - \mu_i)$, et en comparant les degrés

des deux membres il vient : $p = k$. On a montré : si la matrice C est diagonalisable, alors elle

admet p valeurs propres distinctes $\mu_1, \dots, \mu_p$ et de plus : $\chi_C(X) = \prod_{i=1}^p (X - \mu_i)$.

Une matrice compagnon est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé à racines simples

I - D —

Q11. Soit P un polynôme unitaire de degré $p \in \mathbb{N}^*$:

$$P = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0$$

et soit une matrice compagnon $C = C(a_1, \dots, a_p)$. On a vu à la question 8 :

$$\chi_C(X) = X^p - a_pX^{p-1} - \dots - a_2X - a_1.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \chi_C(X) = P, \quad & \text{ssi } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_i = -\alpha_{i-1}. \\ & \text{ssi } C = C(-\alpha_0, \dots, -\alpha_{p-1}) \end{aligned}$$

On a montré l'existence et l'unicité d'un p -uplet $(a_1, \dots, a_p)$ vérifiant $\chi_C(X) = P$.

Q12. Soit maintenant Q un polynôme quelconque. Si Q est unitaire de degré $p \geq 1$, on vient de voir que Q est le polynôme caractéristique d'une matrice (compagnon).

Réciproquement, si Q est le polynôme caractéristique d'une matrice (quelconque), on sait que Q est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ (égal à l'ordre de la matrice).

Une CNS pour qu'un polynôme Q soit le polynôme caractéristique d'une matrice, est que Q soit un polynôme unitaire de degré ≥ 1 .

II Matrices symétriques

II - A —

Q13. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+$ et A, B des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$. Posons $C = \lambda A + \mu B$.

— Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_{i,j} = \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}$ par définition des opérations matricielles
 $= \lambda A_{j,i} + \mu B_{j,i}$ puisque A et B sont des matrices symétriques
 $= C_{j,i}$ La matrice $C = \lambda A + \mu B$ est une matrice symétrique.

— Vérifions que C est positive (au sens des matrices symétriques) : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T C x = x^T (\lambda A + \mu B) x = x^T (\lambda A x + \mu B x) = \lambda \underbrace{x^T A x} + \mu \underbrace{x^T B x}$$

Les matrices A et B étant supposées positives, on a $x^T A x \geq 0$ et $x^T B x \geq 0$, et puisque $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+$ il vient finalement : $x^T C x \geq 0$. La matrice $C = \lambda A + \mu B$ est de plus positive.

Q14. Soit A une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$, en particulier on a $A^T = A$. De façon évidente, il vient alors : $A^T = A$ est une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$.

II - B — Soit A une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$.

Q15. Appliquons le théorème spectral : toute matrice symétrique réelle A est ortho-diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $M_n(\mathbb{R})$, tels que : $A = P D P^{-1} = P D P^T$.

Q16. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, considérons un vecteur propre X_i de A pour la valeur propre λ_i :

$$X_i \neq 0 \quad \text{et} \quad A X_i = \lambda_i X_i$$

Calculons $X_i^T A X_i = X_i^T \cdot \lambda_i X_i$: par linéarité à droite du produit matriciel (réputé bilinéaire), on a $X_i^T A X_i = \lambda_i X_i^T X_i$. On reconnaît enfin une norme au carré :

$$X_i^T A X_i = \lambda_i X_i^T X_i = \lambda_i \|X_i\|^2$$

Q17. La matrice A est supposée positive, donc en particulier pour le vecteur X_i : $X_i^T A X_i \geq 0$.

Utilisons la question précédente, puisque $X_i \neq 0$ on a $\|X_i\|^2 > 0$, et donc on peut écrire :

$$\lambda_i = \frac{X_i^T A X_i}{\|X_i\|^2} \geq 0.$$

Les valeurs propres d'une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$, sont des réels positifs.

Q18. Prenons le cas d'une matrice 2×2 : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$. La matrice est symétrique, supposons-la positive. Notons λ_1, λ_2 les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités, on sait d'après ce qui précède, que λ_1, λ_2 sont des réels positifs. Alors :

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0.$$

i.e. $a + c \geq 0$ et $ac - b^2 \geq 0$.

II - C — Réciproquement, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique, dont toutes les valeurs propres sont positives. Il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T.$$

Q19. Soit un vecteur X de $\mathbb{R}^n$, on note $X' = P^T X$ (vecteur de $\mathbb{R}^n$) : $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Il vient $X = P X'$ d'où

$$X^T A X = (P X')^T A (P X') = X'^T P^T A P X'$$

Alors par associativité :

$$X^T A X = X'^T (P^T A P) X' = X'^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X'$$

Achevons ce calcul, on obtient :

$$X^T A X = (x'_1 \ \dots \ x'_n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (x'_1 \ \dots \ x'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x'_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2$$

Q20. Il faut prouver que A est positive. Soit donc un $X \in \mathbb{R}^n$, reprenons le calcul ci-dessus :

$$X^T A X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2 \geq 0,$$

puisque le carré d'un nombre réel est positif, et que les λ_i ont été supposés positifs.

Q21. Soit A une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$, d'après la partie B : si A est symétrique positive alors ses valeurs propres sont positives. D'après la question 20 ci-dessus : si les valeurs propres de A sont positives alors A est symétrique positive. C'est l'équivalence demandée.

II - D — Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Q22. Dans cette question, l'on suppose qu'une matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifie $A = B^T B$. Alors :

— La matrice A est réelle, et elle est symétrique :

$$A^T = (B^T B)^T = B^T B^{TT} = B^T B = A$$

— La matrice A est positive : soit un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$,

$$X^T A X = X^T B^T B X = (B X)^T (B X) = \|B X\|^2 \geq 0$$

Q23. Réciproquement, soit A une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$. La partie II-B précise le théorème spectral sous la forme :

il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$.

Posons $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, $\Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et enfin $B = (P \Delta)^T = \Delta^T P^T$. On vérifie trivialement :

$$B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et } B^T B = P \Delta \Delta^T P^T = P \Delta^2 P^T = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T = A.$$

III Produits de Kronecker

III - A —

Q24. Il n'y a qu'à appliquer chaque fois la définition du produit de Kronecker :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} B & 2B \\ 2B & 4B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ et } X \otimes Y = \begin{pmatrix} Y \\ 2Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Q25. Nous constatons que la matrice $A \otimes B$ est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

Q26. Les vecteur X, Y sont non nuls et l'on a $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5X$, $BY = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2Y$: ce sont des vecteurs propres respectifs des matrices A, B . Enfin :

$$(A \otimes B)(X \otimes Y) = \begin{pmatrix} B & 2B \\ 2B & 4B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 2Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY + 4BY \\ 2BY + 8BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5BY \\ 10BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10Y \\ 20Y \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} Y \\ 2Y \end{pmatrix} = 10(X \otimes Y)$$

Et l'on a clairement : $X \otimes Y = 0$ ssi ($X=0$ ou $Y=0$), ce qui assure que $X \otimes Y \neq 0$: c'est un vecteur propre de $A \otimes B$.

III - B — *Propriété vraies quels que soient les entiers $n, n', p, p' \in \mathbb{N}^*$, à démontrer en dimension 2*

Q27. Linéarité à gauche : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\alpha A + A') \otimes B = \begin{pmatrix} (\alpha a + a')B & (\alpha b + b')B \\ (\alpha c + c')B & (\alpha d + d')B \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'B & b'B \\ c'B & d'B \end{pmatrix} = \alpha A \otimes B + A' \otimes B$$

Q28. Transposition : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Alors $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$:

$$A^T \otimes B^T = \begin{pmatrix} aB^T & cB^T \\ bB^T & dB^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' & ca' & cc' \\ ab' & ad' & cb' & cd' \\ ba' & bc' & da' & dc' \\ bb' & bd' & db' & dd' \end{pmatrix} \text{ et } A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' & ba' & bb' \\ ac' & ad' & bc' & bd' \\ ca' & cb' & da' & db' \\ cc' & cd' & dc' & dd' \end{pmatrix}$$

On a bien : $A^T \otimes B^T = (A \otimes B)^T$.

Q29. Utilisons le calcul de $A \otimes B$ ci-dessus :

$$\text{tr}(A \otimes B) = aa' + ad' + da' + dd' = (a+d)a' + (a+d)d' = (a+d)(a'+d') = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$$

III - C — *On revient au cas général : $n = n', p = p' \in \mathbb{N}^*$ (matrices carrées). On note $X, Y \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres de A et de B : $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $AX = \lambda X$, $BY = \mu Y$.*

Q30. Calculons : $(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX \otimes BY) = (\lambda X \otimes \mu Y) = \lambda \mu (X \otimes Y)$.

De nouveau : $X \otimes Y$ est nul ssi $X = 0$ ou $Y = 0$. Ici : $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, d'où $X \otimes Y \neq 0$. C'est un vecteur propre de $A \otimes B$, pour la valeur propre $\lambda \mu$.

Q31. Montrons que $A \otimes B$ est positive. Suivons l'indication de l'énoncé : appliquant le résultat de la question 23, il existe $U \in M_n(\mathbb{R})$ et $V \in M_p(\mathbb{R})$ telles que : $A = U^T U$ et $B = V^T V$.

Alors : $A \otimes B = U^T U \otimes V^T V = (U^T \otimes V^T)(U \otimes V) = (U \otimes V)^T (U \otimes V)$, de la forme $W^T W$. Or, cette fois d'après la question 22, on a vu qu'une telle matrice réelle est symétrique et positive.

III - D — *On considère la base canonique $E_{i,j}^{(n)}$ de $M_n(\mathbb{R})$, et la base canonique $E_{i,j}^{(n^2)}$ de $M_{n^2}(\mathbb{R})$.*

Q32. Calculons simplement les produits demandés :

$$E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & E_{2,1}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,3}^{(4)}$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned}
 E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} &= E_{1,1}^{(4)}, & E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} &= E_{1,2}^{(4)}, & E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} &= E_{2,1}^{(4)}, & E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} &= E_{2,2}^{(4)} \\
 E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} &= E_{1,3}^{(4)}, & E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} &= E_{1,4}^{(4)}, & E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} &= E_{2,3}^{(4)}, & E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} &= E_{2,4}^{(4)} \\
 E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} &= E_{3,1}^{(4)}, & E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} &= E_{3,2}^{(4)}, & E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} &= E_{4,1}^{(4)}, & E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} &= E_{4,2}^{(4)} \\
 E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} &= E_{3,3}^{(4)}, & E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} &= E_{3,4}^{(4)}, & E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} &= E_{4,3}^{(4)}, & E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} &= E_{4,4}^{(4)}
 \end{aligned}$$

Q33. On a la relation générale : $E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,\ell}^{(n)} = E_{n(i-1)+k, n(j-1)+\ell}^{(n^2)}$.

Q34. Soit des matrices $A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}^{(n)}$ et $B = \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} b_{k,\ell} E_{k,\ell}^{(n)}$. Alors $B^T = \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} b_{k,\ell} E_{\ell,k}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B^T &= \left[\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}^{(n)} \right] \otimes B^T \\
 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} [E_{i,j}^{(n)} \otimes B^T] \\
 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \left[E_{i,j}^{(n)} \otimes \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} b_{k,\ell} E_{\ell,k}^{(n)} \right] \\
 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} a_{i,j} b_{k,\ell} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{\ell,k}^{(n)}].
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} a_{i,j} b_{k,\ell} \tau_2(E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,\ell}^{(n)}) \quad \text{par définition de } \tau_2 \\
 &= \tau_2 \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} a_{i,j} b_{k,\ell} E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{k,\ell}^{(n)} \right) \quad \text{par linéarité de } \tau_2 \\
 &= \tau_2(A \otimes B)
 \end{aligned}$$

III - E — Application aux entiers algébriques

Q35. Si on considère $\alpha \in \mathbb{Z}$, il est racine du polynôme $P = X - \alpha$ qui est bien unitaire à coefficients $1, \alpha \in \mathbb{Z}$. Alors : tout $\alpha \in \mathbb{Z}$ est entier algébrique.

Q36. Les nombres i et $\sqrt{2}$ sont racines respectives des polynômes $X^2 + 1$ et $X^2 - 2$, qui sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors : i et $\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques.

Q37. Le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$: il est racine du polynôme $X^2 - X - 1$ (unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Alors φ est entier algébrique.

Q38. Plus intéressant, soit α, β des entiers algébriques, racines respectives de polynômes P, Q . Considérons les matrices compagnon A, B des polynômes P, Q : étant racines de leurs polynômes caractéristiques, les scalaires α, β sont des valeurs propres de A, B (respectivement). De plus, les coefficients des matrices A, B appartiennent à $\mathbb{Z}$.

La question 30 nous permet d'affirmer que $\alpha\beta$ est valeur propre de la matrice $C = A \otimes B$, et donc : $\alpha\beta$ est racine du polynôme caractéristique R de cette matrice. On sait déjà qu'un polynôme caractéristique est un polynôme unitaire, il reste à remarquer que la matrice C est à coefficients entiers, donc aussi le polynôme R. Finalement :

le scalaire $\alpha\beta$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers : c'est un entier algébrique.

IV États quantiques de Werner

Q39. Soit des matrices $A, B \in \mathcal{Q}_N$. En particulier ces matrices sont symétriques et positives, alors d'après la question 13 : pour tout $t \in [0, 1]$, $tA + (1-t)B$ est symétrique et positive. De plus :

$$\text{tr}(tA + (1-t)B) = t \text{tr}(A) + (1-t) \text{tr}(B) = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$$

On a montré : si $A, B \in \mathcal{Q}_N$ alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a encore $tA + (1-t)B \in \mathcal{Q}_N$.

Q40. (i) Démontrons par récurrence : $\forall m \geq 1, \forall p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^+, \forall A_1, \dots, A_m$ symétriques positives, la matrice $p_1A_1 + \dots + p_mA_m$ est symétrique positive.

— $m=1$: c'est la question 13, en prenant $B=0$ (la matrice nulle est symétrique et positive).

— $m=2$: c'est la question 13, aux notations près (légèrement différentes ici).

— Soit $m \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang m et considérons des matrices $A_1, \dots, A_{m+1}$ symétriques positives, et $p_1, \dots, p_{m+1}$ dans $\mathbb{R}^+$: d'après l'hypothèse de récurrence, la matrice $A = p_1A_1 + \dots + p_mA_m$ est symétrique et positive. Alors (encore la question 13, ou le cas $m=2$ détaillé plus haut) : $A + p_{m+1}A_{m+1}$ est symétrique et positive.

(ii) Soit maintenant des matrices $A_1, B_1, \dots, A_m, B_m$ dans $\mathcal{Q}_N$. En particulier pour tout i les matrices A_i, B_i sont symétriques et positives, d'où en appliquant le résultat de la question 31 : les matrices $A_i \otimes B_i$ sont symétriques et positives. Le résultat (i) s'applique alors aux matrices $A_i \otimes B_i$ et aux

réels positifs p_i : la matrice $C = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i$ est symétrique et positive.

De plus :

$$\begin{aligned} \text{tr}(C) &= \sum_{i=1}^m p_i \text{tr}(A_i \otimes B_i) \text{ par linéarité de la trace,} \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \text{tr}(A_i) \text{tr}(B_i) \text{ en appliquant la question 29,} \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \text{ puisque } \text{tr}(A_i) = \text{tr}(B_i) = 1, \text{ et donc : } \underline{\text{tr}(C) = 1.} \end{aligned}$$

Nous avons montré : $\forall m \geq 1, \text{ si } A_1, B_1, \dots, A_m, B_m \in \mathcal{Q}_n \text{ et si } p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^m p_i = 1,$
alors la matrice $C = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i \in \mathcal{Q}_{n^2}$.

Q41. Considérons un état quantique $C \in \mathcal{Q}_{n^2}$ séparable : il existe donc $A_1, B_1, \dots, A_m, B_m \in \mathcal{Q}_n$ et $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, vérifiant $C = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i$. Alors :

$$\tau_2(C) = \sum_{i=1}^m p_i \tau_2(A_i \otimes B_i) = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i^T = \sum_{i=1}^m p_i A_i \otimes B_i \text{ puisque } B_i \text{ est symétrique}$$

En particulier, $\tau_2(C)$ est symétrique positive.

Q42. Soit la matrice ligne $\Psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E_{1,i}^{(1,n)} \otimes E_{1,i}^{(1,n)}$ où la base canonique de $M_{1,n}(\mathbb{R})$ est notée $(E_{1,i}^{(1,n)})_{1 \leq i \leq n}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \Psi^T \Psi &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n E_{1,i}^{(1,n)} \otimes E_{1,i}^{(1,n)} \right]^T \cdot \left[\sum_{j=1}^n E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)} \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n E_{1,i}^{(1,n)T} \otimes E_{1,i}^{(1,n)T} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^n E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n E_{i,1}^{(n,1)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^n E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i,j} [E_{i,1}^{(n,1)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)}] \cdot [E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j} [E_{i,1}^{(n,1)} E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)} E_{1,j}^{(1,n)}] = \frac{1}{n} \sum_{i,j} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [E_{i,i}^{(n)} \otimes E_{i,i}^{(n)}] + \frac{1}{n} \sum_{i < j} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)}] + \frac{1}{n} \sum_{j < i} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [E_{i,i}^{(n)} \otimes E_{i,i}^{(n)}] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)} \otimes E_{j,i}^{(n)}] \end{aligned}$$

Q43. Les termes $E_{i,i}^{(n)} \otimes E_{i,i}^{(n)}$ sont des matrices symétriques positives, puisque les $E_{i,i}^{(n)}$ le sont (question 31). Les matrices $E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)} \otimes E_{j,i}^{(n)}$ sont symétriques car de la forme $M + M^T$, et elles sont positives également :

$$\begin{aligned} (X^T \otimes X^T) [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)} \otimes E_{j,i}^{(n)}] (X \otimes X) &= X^T E_{i,j}^{(n)} X \otimes X^T E_{i,j}^{(n)} X + X^T E_{j,i}^{(n)} X \otimes X^T E_{j,i}^{(n)} X \\ &= (x_i x_j) \otimes (x_i x_j) + (x_j x_i) \otimes (x_j x_i) \quad (\text{matrices } 1 \times 1) \\ &= x_i^2 x_j^2 + x_j^2 x_i^2 = 2x_i^2 x_j^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons écrit $\Psi^T \Psi$ comme une combinaison de matrices symétriques positives, par des coefficients positifs : c'est une matrice symétrique positive. Il reste à calculer la trace :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Psi^T \Psi) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{tr} [E_{i,i}^{(n)} \otimes E_{i,i}^{(n)}] + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{tr} [E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)} \otimes E_{j,i}^{(n)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{tr} [E_{i,i}^{(n)} \otimes E_{i,i}^{(n)}] + 0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Q44. Calculons donc pour $n=2$:

$$\begin{aligned} \Psi^T \Psi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 E_{i,i}^{(2)} \otimes E_{i,i}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 2} E_{i,j}^{(2)} \otimes E_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 2} E_{j,i}^{(2)} \otimes E_{j,i}^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Désormais on fixe $p \in [0, 1]$ et l'on pose : $W_p = p\Psi^T \Psi + (1-p)\frac{1}{4}I_4$.

Q45. À la question 44, nous avons montré que $\Psi^T \Psi$ est un état quantique, et par ailleurs la matrice $\frac{1}{4}I_4$ est un état quantique (facilement, I_4 est symétrique positive de trace 4).

La matrice W_p est donc de la forme $tA + (1-t)B$ où $p \in [0, 1]$ et $A, B \in \mathcal{Q}_N$: alors W_p est un état quantique (voir question 39).

Q46. Faisons donc ce calcul :

$$W_p = \frac{p}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-p}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+p & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 \\ 2p & 0 & 0 & 1+p \end{pmatrix}$$

Q47. Reprenons l'expression de la question 44 :

$$\Psi^T \Psi = \frac{1}{2} E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tau_2(\Psi^T \Psi) &= \frac{1}{2} E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} + \frac{1}{2} E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par ailleurs : $I_4 = E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)}$, d'où :

$$\tau_2(I_4) = E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} = I_4$$

Finalement :

$$\tau_2(W_p) = \frac{p}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-p}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 2p & 0 \\ 0 & 2p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+p \end{pmatrix}.$$

Calcul du polynôme caractéristique Notons M cette matrice $\tau_2(W_p)$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_4 - M) &= \frac{1}{4^4} \begin{vmatrix} 4\lambda - 1 - p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda - 1 + p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 4\lambda - 1 + p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda - 1 - p \end{vmatrix} = \frac{1}{4^4} (4\lambda - 1 - p)^2 \begin{vmatrix} 4\lambda - 1 + p & -2p \\ -2p & 4\lambda - 1 + p \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4^4} (4\lambda - 1 - p)^2 [(4\lambda - 1 + p)^2 - 4p^2] = \frac{1}{4^4} (4\lambda - 1 - p)^3 (4\lambda - 1 + 3p) = \left(\lambda - \frac{1+p}{4}\right)^3 \left(\lambda - \frac{1-3p}{4}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\tau_2(W_p)$ sont $\frac{1+p}{4} > 0$ et $\frac{1-3p}{4}$, cette dernière valeur propre étant négative pour tout p appartenant à $I =]\frac{1}{3}; 1]$. Pour ces valeurs de p , la matrice $\tau_2(W_p)$ n'est pas symétrique et positive, et donc (question 41) : l'état quantique W_p n'est pas séparable.