$\boxed{\text{Concours ATS 2020}}$

Correction

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On définit, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a par

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable.**

   Lorsque $a = 1$, la matrice A_1 est symétrique à coefficients réels, donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2. **Soit a un réel. Calculer A_aU_1. En déduire que 2 est valeur propre de A_a .**

$$A_aU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 0 \times 1 + a \times 0 \\ 0 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Donc 2 est valeur propre de A_a et U_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

3. **Soit a un réel. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a.**

$$P_{A_a}(X) = \mathrm{Det}(XI_3 - A_a) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

   par développement par rapport à la deuxième colonne ,

$$P_{A_a}(X) = (-1)^{2+2}(X-2) \begin{vmatrix} X & -a \\ -1 & X \end{vmatrix}$$

$$P_{A_a}(X) = (X-2)(X^2 - a)$$

4. **Donner, en discutant selon les valeurs du réel a, les valeurs propres réelles de A_a et leurs ordres de multiplicité.** On recopiera et on complétera le tableau synthétique suivant.

   - Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $X^2 - a$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Donc le polynôme caractéristique n'est pas scindé et a pour seule racine réelle le nombre 2.
   - Si $a = 0$, $P_{A_a}(X) = (X-2)(X^2)$
   - Si $a > 0$, $P_{A_a}(X) = (X-2)(X^2-a) = (X-2)(X-\sqrt{a})(X+\sqrt{a})$

   Remarque : $\sqrt{4} = 2$

Cas	**Valeurs propres réelles de A_a et ordres de multiplicité**
$a < 0$	2 est valeur propre de multiplicité 1
$a = 0$	2 est valeur propre de multiplicité 1 et 0 est valeur propre de multiplicité 2
$a > 0$ et $a \neq 4$	2 est valeur propre de multiplicité 1 $\sqrt{a}$ est valeur propre de multiplicité 1 et $-\sqrt{a}$ est valeur propre de multiplicité 1
$a > 0$ et $a = 4$	2 est valeur propre de multiplicité 2 et -2 est valeur propre de multiplicité 1

5. (a) **Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.**
   si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors P_{A_a} est scindé et à racines simples, donc A_a est diagonalisable.

   (b) **Déterminer une base du noyau de A_0 . La matrice A_0 est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?**
   Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   $u \in \mathrm{Ker} A_0$
   ssi $A_0 u = 0$
   ssi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} & & 0 & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \\ x & & & = & 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases}$

Donc

$$\text{Ker} \quad A_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

0 est valeur propre de multiplicité 2 et DimKer $\quad A_0 = 1 < 2$, donc A_0 n'est pas diagonalisable.

$P_{A_0} = (X-2)X^2$ est scindé donc A_0 est trigonalisable.

6. Étude de la matrice A_4 .

   (a) **Déterminer une matrice colonne $U_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_1, U_2) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre 2.**

   Methode 01 (si je n'ai pas lu la question (c), monumentale erreur lors d'un concours!!!)

   Je pose $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$

   $A_4 u = 2u$

   ssi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

   ssi $\begin{cases} & & 4z & = & 2x \\ & 2y & & = & 2y \\ x & & & = & 2z \end{cases}$

   ssi

   $x = 2z$

   donc

   $$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   posons $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Methode 02 (si j'ai écouté les conseils de mon professeur et lu la question (c))

Posons $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et vérifions

$$A_4 U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times \frac{1}{2} \\ 2 \times 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U_2$$

puis

De plus U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires donc la famille (U_1, U_2) est libre dans l'espace propre E_2 de dimension inférieure ou égale à 2.

C'est donc une base de E_2.

(b) **Déterminer une matrice colonne $U_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_3) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre -2.**

Methode 01 (si je n'ai pas lu la question (c), monumentale erreur lors d'un concours!!!)

Je pose $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$

$A_4 u = -2u$

ssi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} 4z = -2x \\ 2y = -2y \\ x = -2z \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x = -2z \\ -y = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$

donc

$$E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

posons $U_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Methode 02 (si j'ai écouté les conseils de mon professeur et lu la question (c))

Posons $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et vérifions

$$A_4U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2 \times 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2U_3$$

(c) **Calculer la matrice inverse de** $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow -L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc l'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) Trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_4 = PDP^{-1}$.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3)$.

Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $A_a = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$

P^{-1} est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$

et, d'après le théorème de changement de bases,

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

ie
$A_4 = PDP^{-1}$.

enfin $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \\ U_1 & 2 & 0 & 0 \\ U_2 & 0 & 2 & 0 \\ U_3 & 0 & 0 & -2 \end{array}$.

ie $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4v_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier naturel n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

7. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de v_n, en fonction de n.**
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n$,
   donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4.
   ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n v_0 = (-1)4^n$

8. (a) **Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = BX_n$.**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$

   ie $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2u_n + 4w_n \\ 4v_n \\ u_n + 2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   Donc $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) **Déterminer deux nombres réels a et b tels que $B = A_a + bI_3$.**

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = A_4 + 2I_3$.

Donc $a = 4$ et $b = 2$.

(c) **En déduire que X_0 est un vecteur propre de la matrice B associé à une valeur propre que l'on précisera.**

$X_0 = -U_1 + 2U_2$ donc $X_0 \in \mathrm{Vect}(U_1, U_2)$

par conséquent, $A_4X_0 = 2X_0$

$BX_0 = (A_4 + 2I_3)\, X_0 = A_4X_0 + 2I_3X_0 = 2X_0 + 2X_0 = 4X_0$

Donc X_0 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 4.

(d) **En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n.**

Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = 4^n X_0$

Initialisation

$X_0 = 1X_0 = 4^0 X_0$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,supposons que $X_n = 4^n X_0$

Alors $X_{n+1} = BX_n = B(4^n X_0) = 4^n(BX_0) = 4^n(4X_0) = 4^{n+1}X_0$

Conclusion

Par principe de récurrence, on a donc

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = 4^n X_0$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = 4^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n \\ (-1)4^n \\ 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

On rappelle que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A — Lieux de points

Les trois questions de cette partie peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{-3+2\sqrt{3}i}{3}$. **Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.**

   Calculons $f(a), f(b)$ et $f(c)$.

   $f(a) = f(1) = \dfrac{1-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

   $f(b) = f(-3) = \dfrac{(-3)-1}{(-3)+1} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

   $$f(c) = f(1) = \frac{\left(\dfrac{-3+2\sqrt{3}i}{3}\right) - 1}{\left(\dfrac{-3+2\sqrt{3}i}{3}\right) + 1} = \frac{\left(-3+2\sqrt{3}i\right) - 3}{\left(-3+2\sqrt{3}i\right) + 3} = \frac{-6+2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$$

   donc

   $$f(c) = \frac{6}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{i}\right) + \frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = \left(\sqrt{3}\right)(i) + 1$$

   donc

   $$f(c) = 1 + \left(\sqrt{3}\right) i$$

   Montrons que ABC est un triangle équilatéral.

   $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + \left(\sqrt{3}\right) i - 0}{2-0} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

Le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ a donc pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$.

On en déduit que $\frac{AC}{AB} = 1$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc le triangle ABC a deux cotés de même longueur formant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, c'est donc un triangle équilatéral.

2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.

   Considérons les points C d'affixe $z_C = 1$ et D d'affixe $z_D = -1$

   $f(z) \in \mathbb{U}$

   ssi $|f(z)| = 1$

   ssi $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$

   ssi $\dfrac{|z-1|}{|z-(-1)|} = 1$

   ssi $\dfrac{|z_M - z_C|}{|z_M - z_D|} = 1$

   ssi $\dfrac{CM}{DM} = 1$

   ssi $CM = DM$

   donc le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ est la médiatrice du segment $[CD]$, il s'agit de l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$).

3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$

   Posons $z = x + iy$

   ssi $|f(z)| = \sqrt{2}$

   ssi $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{2}$

   ssi $\dfrac{|z-1|}{|z+1|} = \sqrt{2}$

   ssi $|z-1| = \sqrt{2}|z+1|$

   ssi $|x+iy-1|^2 = 2|x+iy+1|^2$

   ssi $(x-1)^2 + y^2 = 2\left((x+1)^2 + y^2\right)$

   ssi $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right)$

   ssi $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2$

ssi $0 = x^2 + 6x + y^2 + 1$

ssi $0 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 9 - 9 + y^2 + 1$

ssi $0 = (x+3)^2 + y^2 - 8$

ssi $(x+3)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

Conclusion :

Le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $\Omega(-3; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Partie B — Étude d'une suite récurrente

1. (a) **Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.**

    Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.

    Soit $z \in \mathbb{C}$.

    $f(z) = 1$

    ssi $\frac{z-1}{z+1} = 1$

    ssi $z - 1 = z + 1$

    ssi $0 = 2$

    ce qui est faux quelque soit $z \in \mathbb{C}$.

    Donc l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

    Résolution de $f(z) = \omega$ pour $\omega \neq 1$

    $f(z) = \omega$

    ssi $\dfrac{z-1}{z+1} = \omega$

    ssi $z - 1 = \omega(z+1)$

    ssi $z - 1 = \omega z + \omega$

    ssi $(1-\omega)z = 1 + \omega$

    ssi $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$

    Donc l'équation $f(z) = \omega$ admet pour unique solution $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$.

(b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = \omega$ admet aucune ou une unique solution donc f est injective de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

$1 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

(c) Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$.

f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
$f(0) = -1$ et $f(1) = 0$
donc -1 a pour antécédent 0 et 0 a pour antécédent 1. De plus, d'après la question 1.(a), 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
Enfin, f est injective, donc f restreinte à $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$ est à valeurs dans $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$.
Ou encore :
Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

Soit $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1\}$,
$f(z) = z$
ssi $\dfrac{z-1}{z+1} = z$
ssi $z - 1 = z(z+1)$
ssi $z - 1 = z^2 + z$
ssi $z^2 = -1$
ssi $z = i$ ou $z = -i$
L'ensemble de solution est $\{-i; i\}$

(b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?

Si $u_0 = i$ alors $u_1 =$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i$ et la suite est stationnaire.

De même, si $u_0 = -i$, la suite est stationnaire.

(c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.

Soit $u_0 \notin \{-i, i\}$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 \notin \{-i, i\}$ par hypothèse.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $u_n \notin \{-i, i\}$.

Alors

$u_n \neq i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq i$

et

$u_n \neq -i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq -i$.

donc $u_{n+1} \notin \{-i, i\}$

Conclusion

Par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$$

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -i$.

3. (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-i$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i}$
   $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} - i}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} + i}$
   $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1 - i(u_n + 1)}{u_n - 1 + i(u_n + 1)}$
   $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1 - iu_n - i}{u_n - 1 + iu_n + i}$
   $v_{n+1} = \dfrac{(1 - i)u_n - (1 - i)(i)}{(1 + i)u_n + (1 + i)i}$
   $v_{n+1} = \dfrac{1 - i}{1 + i}\dfrac{u_n - i}{u_n + i}$
   $v_{n+1} = \dfrac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)}v_n$
   $v_{n+1} = \dfrac{-2i}{2}v_n$
   $v_{n+1} = (-i)v_n$
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -i$.

   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-i)^n v_0$.
   or $(-i)^n = \begin{cases} 1 & \texttt{si} \quad n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -i & \texttt{si} \quad n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -1 & \texttt{si} \quad n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ i & \texttt{si} \quad n = 4k + 3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$
   et $v_0 = \dfrac{u_0 - i}{u_0 + i}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} v_0 & \texttt{si} \quad n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ (-i)v_0 = v_1 & \texttt{si} \quad n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -v_0 = v_2 & \texttt{si} \quad n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ iv_0 = v_3 & \texttt{si} \quad n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Donc la suite (v_n) est périodique de période 4

Considérons les points du plan complexe, A d'affixe v_0, D d'affixe v_1,C d'affixe v_2, et B d'affixe v_3.

Alors

$z_B = iz_A = \mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{2}} z_A$

$z_C = iz_B = \mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{2}} z_B$

$z_D = iz_C = \mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{2}} z_C$

Donc A, B, C et D sont les quatre sommets d'un carré dont l'intersection des diagonales est le centre du repère O.

(c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \dfrac{u_n - i}{u_n + i}$

donc

$v_n (u_n + i) = u_n - i$

d'où

$v_n u_n + v_n \times i = u_n - i$

donc

$u_n v_n - u_n = -iv_n - i$

donc

$u_n (v_n - 1) = -iv_n - i$

d'où

$u_n = -i\dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$

La suite (v_n) est périodique de période 4 donc la suite (u_n) est périodique de période 4.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y"(x) + mxy'(x) + y(x) = x^2 \qquad (E_m)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où m est un paramètre réel.

On note (H_m) l'équation homogène associée à (E_m)

$$y"(x) + mxy'(x) + y(x) = 0. \qquad (H_m)$$

Les parties A, B, C et D de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A — Étude du cas $m = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H_0).

   Considérons (H_0) : $\qquad y" + y = 0$

   et son équation caractéristique $(e) \qquad r^2 + 1 = 0$

   L'équation (e) admet deux solutions complexes conjuguées $-i = 0 + (-1)i$ et $i = 0 + 1i$, donc l'équation homogène (H_0) a pour solution générale

   $y_0(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^{0x} = A\cos(x) + B\sin(x)$

   où A et B sont des constantes réelles.

2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer.

   Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels.

   Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x + a$

   et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f"(x) = 2$

   f est solution de l'équation différentielle (E_0)

   ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ f"(x) + f(x) = x^2$.

   ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ 2 + x^2 + ax + b = x^2$.

   par identification des coefficients, on obtient

$$\begin{cases} 1 &= 1 \\ a &= 0 \\ b+2 &= 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b &= -2 \end{cases}$$

et une solution particulière de (E_0) est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

   On en déduit que la solution générale de (E_0) est définie par

   $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2$

   où A et B sont des constantes réelles.

4. Donner l'unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

   On cherche y solution de (E_0) donc y est de la forme

   $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2$

   ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $y'(x) = -A\sin x + B\cos x + 2x$

   De plus $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

   d'où

   $$\begin{cases} A\cos 0 + B\sin 0 + 0^2 - 2 &= 0 \\ -A\sin 0 + B\cos 0 + 2\times 0 &= 1 \end{cases}$$

   donc

   $$\begin{cases} A - 2 &= 0 \\ B &= 1 \end{cases}$$

   Conclusion :

   L'unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

   $y(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$

Partie B - Étude du cas m = 1

Dans les trois premières questions de cette partie, on cherche les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle homogène (H_1) et pour lesquelles $a_1 = 0$.

1. Montrer que la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Considérons la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$.

alors la fonction y définie sur $]-R; R[$ par $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R; R[$

et $\forall x \in]-R; R[$,

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

et

$y"(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Une telle fonction est solution de (H_1)

ssi $\forall x \in]-R; R[, \quad y"(x) + xy'(x) + y(x) = 0$

ssi $\forall x \in]-R; R[, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \times \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

(en faisant le changement de variable $n' = n - 2$ dans la première somme et en distribuant x dans la deuxième somme)

ssi $\forall x \in]-R; R[$,

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

(en traitant à part le cas $n = 0$)

ssi $\forall x \in]-R; R[$,

$2 \times 1 \times a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$

(en regroupant les sommes)

ssi $\forall x \in]-R;R[,\quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n\right] x^n = 0$

ssi $\forall x \in]-R;R[,\quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\right] x^n = 0$

ssi $\forall x \in]-R;R[,\quad 2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) \left[(n+2)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$

Puis, par identification des coefficients,

pour $n = 0 \quad 2a_2 + a_0$ donc $a_2 = -\frac{1}{2}a_0$

Enfin pour $n \geq 1 \quad (n+1)\left((n+2)a_{n+2} + a_n\right) = 0$ donc $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$

ie $a_{n+2} = -\dfrac{1}{n+2}a_n$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$.

Initialisation

pour $n = 0$,

$a_{2\times 0} = a_0$ et $\frac{(-1)^0}{2^0 0!}a_0 = \frac{1}{1\times 1}a_0 = a_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$,

alors, d'après la question précédente,

$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = -\dfrac{1}{(2n)+2}a_{2n} = -\dfrac{1}{2(n+1)}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$

donc

$a_{2(n+1)} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2\times 2^n)\times((n+1)\times n!)}a_0$

donc

$$a_{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \times (n+1)!} a_0$$

Conclusion

Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$.

Initialisation

pour $n = 0$,

$a_{2\times 0+1} = 0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $a_{2n+1} = 0$,

alors, d'après la question précédente,

$$a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = -\frac{1}{(2n+1)+2} a_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)+2} 0 = 0$$

Conclusion

Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$.

3. Donner une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0.

Considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$ solution de (H_0).

alors la fonction y définie sur $]-R; R[$ par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0 x^{2n}$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(x^2\right)^n}{2^n}.$$

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n.$$

Enfin,

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((-1) \frac{x^2}{2} \right)^n.$$

On reconnait le développement en série entière de la fonction exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

On en conclut que la fonction recherchée est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$y(x) = a_0 \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2}}$$

Partie C — Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0), avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N, n, u_n et u_{n+1}.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \tfrac{n^2}{N^2}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) = \tfrac{n^2}{N^2} - u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = \tfrac{n^2}{N^4} - \tfrac{1}{N^2} u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \tfrac{n^2}{N^4} - \tfrac{1}{N^2} u_n + 2u_{n+1} - u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \tfrac{n^2}{N^4} + 2u_{n+1} - \left(1 + \tfrac{1}{N^2}\right) u_n$$

2. Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \cdots, u_N]$.

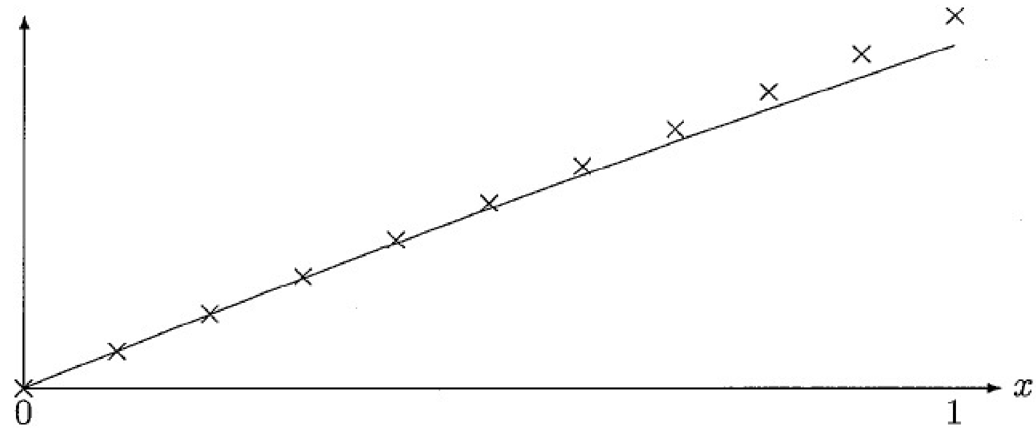
```
N=10
u0=0
u1=1/N

function Res=cauchy(u0,u1,N)
    L=[u0,u1]
    N2=N*N
    N4=N2*N2
    v0=u0
    v1=u1
    for n=2:N
        v2=n*n/N4+2*v1-(1+1/N2)*v0
        L=[L v2]
        v0=v1
        v1=v2
    end
    Res=L
endfunction


disp(cauchy(u0,u1,N))

// illustration
x=[0:1/N:1]
plot(x,2*cos(x)+sin(x)+x^2-2,"-",x,cauchy(u0,u1,N),"x")
```

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l'impact sur le temps de calcul ?

Pour améliorer la solution approchée, il suffit d'augmenter la valeur de N. L'impact sera une augmentation du temps de calcul.

Partie D - Existence d'une solution polynomiale non nulle

L'objectif de cette partie est de trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation différentielle homogène (H_m) admet au moins une solution polynomiale non nulle.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m). Montrer que $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

   Supposons qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m).

   Alors $P" + mXP' + P = 0$

   Si P est constant,

   alors $P = c \in \mathbb{R}$

   et $P' = P" = 0$

   alors $P" + mXP' + P = 0 + mX \times 0 + c = 1$

   donc si P est solution alors $c = 0$ et $P = 0$.

   Conclusion :

   La solution polynomiale non nulle de (H_m) n'est pas constante et $d \neq 0$.

Soit $d \neq 0$ le degré de P.
Alors $P = a_d X^d + Q$, avec $\deg(Q) \leq d - 1$
et $P' = d a_d X^{d-1} + Q'$, avec $\deg(Q') \leq d - 2 \leq d - 1$

donc
$P" + mXP' + P = P" + mX(da_d X^{d-1} + Q') + a_d X^d + Q$
$= P" + mda_d X^d + mXQ' + a_d X^d + Q$
donc
$P" + mXP' + P = (md + 1)a_d X^d + P" + mXQ' + Q$

$\deg(P" + mXQ' + Q) \leq max(\deg(P"), \deg(mXQ'), \deg(Q)) \leq d - 1 < d$
Par conséquent ,
Si $P" + mXP' + P = 0$, alors $(md + 1)a_d = 0$
or $a_d \neq 0$, donc $md + 1 = 0$ et $d = -\frac{1}{m}$ ou $m = -\frac{1}{d}$

Conclusion
S'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m), alors $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

Dans les questions qui suivent, nous allons étudier le résultat réciproque.

On fixe un entier naturel non nul $d \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite montrer que $(H_{-l/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d, et on considère l'application $h : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \qquad h(P) = P" - \frac{1}{d} XP' + P$$

2. (a) Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.

   $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$
   justification non demandée :
   La base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ est $(1, X, \cdots, X^d)$.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leq d-1$.

Tout d'abord
Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $h(P) = P" - \frac{1}{d}XP' + P \in \mathbb{R}[X]$

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_d[X]$,
Alors $P = a_d X^d + Q$, avec $a_d \in \mathbb{R}$ et $\deg(Q) \leq d-1$
puis $P' = da_d X^{d-1} + Q'$, avec $\deg(Q') \leq d-2$
donc
$P" - \frac{1}{d}XP' + P = P" - \frac{1}{d}X(da_d X^{d-1} + Q') + a_d X^d + Q$
$= P" - \frac{1}{d}da_d X^d + mXQ' + a_d X^d + Q$
donc
$P" - \frac{1}{d}XP' + P = (-1+1)a_d X^d + P" - \frac{1}{d}XQ' + Q = P" - \frac{1}{d}XQ' + Q$

par conséquent,
$\deg(P" - \frac{1}{d}XP' + P) = \deg(P" - \frac{1}{d}XQ' + Q)$
donc
$\deg(P" - \frac{1}{d}XP' + P) \leq \max(\deg(P"), \deg(-\frac{1}{d}XQ'), \deg(Q))$
$\leq \max(d-2, 1+d-2, d-1) \leq d-1$
ie
$\deg(P" - \frac{1}{d}XP' + P) \leq \max(d-2, 1+d-2, d-1) \leq d-1$

Donc
$\deg(h(P)) \leq d-1$

(c) Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

Tout d'abord, d'après la question précédente,
si $P \in \mathbb{R}_d[X]$, alors $h(P) \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \subset \mathbb{R}_d[X]$

De plus,
Si on considère $\lambda \in \mathbb{R}, \quad P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_d[X]$, alors
$h(\lambda P + Q)$
$= (\lambda P + Q)" - \frac{1}{d}X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q)$
$= (\lambda P" + Q") - \frac{1}{d}X(\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q)$
$= \lambda P" + Q" - \frac{1}{d}X\lambda P' - \frac{1}{d}XQ' + \lambda P + Q$
$= \lambda(P" - \frac{1}{d}XP' + P) + (Q" - \frac{1}{d}XQ' + Q)$
$= \lambda h(P) + h(Q)$

Donc h est linéaire

Conclusion
h est une application linéaire de $\mathbb{R}_d[X]$ vers $\mathbb{R}_d[X]$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.

3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.

   D'après la question 2.(b),

   pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X], \quad \deg(h(P)) \leq d - 1$

   donc X^d n'a pas d'antécédent par h

   par conséquent

   h n'est pas surjective.

4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$.

   h est un endomorphisme non surjectif de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ de dimension finie.

   Or un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est surjectif ssi il est injectif

   donc h n'est pas injectif

   donc $\mathrm{Ker}(h) \neq \{0\}$

   donc il existe $P \neq 0$ tel que $h(P) = 0$

   Conclusion

   Il existe un polynôme non nul P tel que $P" - \frac{1}{d}XP' + P = 0$

   et l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.

Exercice 4

On rappelle que la ***partie entière*** d'un nombre réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x+1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   considérons $n = \lfloor x \rfloor$
   alors $n \leqslant x < n+1$
   puis $n+1 \leqslant x+1 < n+2$
   et $\lfloor x+1 \rfloor = n+1 = \lfloor x \rfloor + 1$.

   Conclusion
   $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$

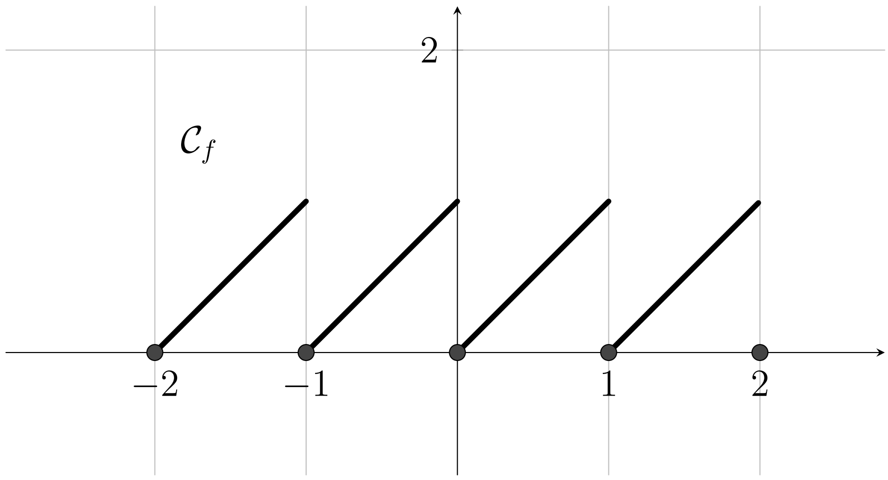
   (b) Montrer que la fonction f est périodique de période 1.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1-(\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor + 1 - 1 = f(x)$
   Donc f est périodique de période 1.

   (c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$ et préciser la valeur de $f(1)$.

   Soit $x \in [0, 1[$
   $f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - 0 = x$
   De plus, par périodicité,
   $f(1) = f(0+1) = f(0) = 0$

(d) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.



(e) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

La fonction f n'est pas continue en 1 car $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ or $f(1) = 0 \neq 1$
Par conséquent, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)\right)$$

la série de Fourier de la fonction f.

2. (a) Calculer le coefficient a_0.

La fonction f est périodique de période $T = 1$ et a donc pour pulsation $\omega = 2\pi/T = 2\pi$)
$a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}t = 1 \int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx = \dfrac{2}{1}\int_0^1 x\cos(2n\pi x)dx$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$
$v(x) = \dfrac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)$ $\qquad v'(x) = \cos(2n\pi x)$
Par intégration par parties,

$$\int_0^1 uv'(x)\mathrm{d}x = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)\mathrm{d}x$$

$a_n = 2\left(\left[\dfrac{1}{2n\pi}x\sin(2n\pi x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_0^1 \sin(2n\pi x)\mathrm{d}x\right)$
d'où
$a_n = 2\left(\left[\dfrac{1}{2n\pi}x\sin(2n\pi x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{2n\pi}\left[-\dfrac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi x)\right]_0^1\right)$
donc
$a_n =$
$2\left(\left(\left(\dfrac{1}{2n\pi}1\sin(2n\pi)\right) - \left(\dfrac{1}{2n\pi}0\sin 0\right)\right) + \dfrac{1}{(2n\pi)^2}\left(\cos(2n\pi) - \cos 0\right)\right)$
donc
$a_n = 2\left(\left(\left(\dfrac{1}{2n\pi}0\right) - \left(\dfrac{1}{2n\pi}0\right)\right) + \dfrac{1}{(2n\pi)^2}\left(1-1\right)\right)$
donc $a_n = 0$

(c) Calculer les coefficients b_n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \dfrac{2}{1}\int_0^1 x\sin(2n\pi x)dx$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\dfrac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v(x) = -\dfrac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi x) \qquad\qquad v'(x) = \sin(2n\pi x)$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 uv'(x)\mathrm{d}x = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)\mathrm{d}x$$

$b_n = 2\left(\left[-\dfrac{1}{2n\pi}x\cos(2n\pi x)\right]_0^1 - \left(-\dfrac{1}{2n\pi}\right)\displaystyle\int_0^1 \cos(2n\pi x)\mathrm{d}x\right)$

d'où

$b_n = 2\left(\left[-\dfrac{1}{2n\pi}x\cos(2n\pi x)\right]_0^1 + \dfrac{1}{2n\pi}\left[+\dfrac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)\right]_0^1\right)$

donc

$b_n =$

$2\left(\left(\left(-\dfrac{1}{2n\pi}1\cos(2n\pi)\right) - \left(-\dfrac{1}{2n\pi}0\cos 0\right)\right) + \dfrac{1}{(2n\pi)^2}\left(\sin(2n\pi) - \sin 0\right)\right)$

donc

$b_n = 2\left(\left(\left(-\dfrac{1}{2n\pi}1\right) - 0\right) + \dfrac{1}{(2n\pi)^2}(0-0)\right)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n = -\dfrac{1}{n\pi}$

(d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

La fonction f est une fonction périodique de période 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point.

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(f(x+h) + f(x-h)\right)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \texttt{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} & \texttt{si} \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. (a) Justifier la convergence de la série numérique $U = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, à valeurs positives et de limite égale à 0 en $+\infty$,
donc,
d'après le critère spécial des séries alternées,
la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$ est convergente.

(b) Trouver une relation entre U et $Sf(1/4)$.

$$Sf(1/4) = \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(1/4)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N\to+\infty} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(n\omega\frac{1}{4}\right) + b_n \sin\left(n\omega\frac{1}{4}\right)\right)\right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (0 + \left(-\frac{1}{n\pi}\right) \sin\left(2n\pi\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (0 + \left(-\frac{1}{n\pi}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$Sf(1/4) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{N} (0 + \left(-\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{car } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin\left((2k)\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$$

Donc

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\right) \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{2k+1}\right)(-1)^k$$

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\right) \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

Posons désormais $U = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$

Alors

$$Sf(1/4) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\right) U$$

(c) Montrer que $U = \pi/4$.

$1/4 \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{N}$ donc $Sf(1/4) = 1/4$
Ainsi
$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi}\right) U$
d'où
$-\frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{\pi}\right) U$
donc
$\frac{\pi}{4} = U$

Conclusion

$$U = \frac{\pi}{4}$$

4. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

(b) Calculer la somme $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La fonction f de cet exercice est périodique de période 1 et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Parseval, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{1}\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

donc

$$\frac{1}{1}\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(0 + \left(-\frac{1}{n\pi}\right)^2\right)$$

donc

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

donc

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Conclusion

$$V = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

———————————————-