e3a 2020 - PC math

durée 4 heures - calculatrices interdites

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculons le polynôme caractéristique de M_a :

$$\begin{aligned} \chi_{M_a}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} \quad \text{on a développé par rapport à la première colonne} \\ &= (X-1)(X^2-1) \\ &= (X-1)^2(X+1) \end{aligned}$$

   χ_{M_a} est scindé et admet deux racines : 1 et -1. M_a est alors diagonalisable si et seulement si E_1 est de dimension 2 (1 est une racine double) et E_{-1} est de dimension 1 (-1 est une racine simple).
   Comme -1 est une racine simple, $dim(E_{-1}) = 1$. Étudions alors E_1.
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} \alpha + a\beta = \alpha \\ \gamma = \beta \\ \beta = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} a\beta = 0 \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

   • Si $a = 0$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in E_1 \iff \gamma = \beta \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   Comme ces deux derniers vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et E_1 est de dimension 2.
   • Si $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \beta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ce vecteur est non nul, il forme une famille libre et E_1 est de dimension 1.
   $\boxed{M_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a = 0.}$

2. Quelle que soit la valeur de a, 0 n'appartient pas au spectre de M_a, donc
   $\boxed{M_a \text{ est inversible pour tous les réels } a.}$

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ (ce qui revient à dire que M_a n'est pas diagonalisable d'après la question 1).
   Notons φ l'endomorphisme canoniquement associé à M_a et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cherche une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que $mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telle que $\varphi(u_1) = -u_1, \varphi(u_2) = u_2$ et $\varphi(u_3) = u_2 + u_3$.
Pour u_1, la résolution du système $M_a X = -X$ où X est une matrice-colonne permet de choisir $u_1 = (a/2, -1, 1)$.
Pour u_2, choisissons un vecteur propre associé à la valeur 1 : $u_2 = (1, 0, 0)$.
On cherche u_3 sous la forme (α, β, γ) :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_3) = u_2 + u_3 &\iff M_a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \alpha + a\beta = 1 + \alpha \\ \gamma = \beta \\ \beta = \gamma \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a\beta = 1 \\ \beta = \gamma \end{cases} \\
&\iff \beta = \gamma = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

On pose $u_3 = (0, \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$.
Vérifions que (u_1, u_2, u_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_2, u_3) &= \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} \quad \text{on développe par rapport à la deuxième colonne} \\
&= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{-2}{a}
\end{aligned}$$

$det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_2, u_3) \neq 0$, donc $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathrm{mat}'_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de φ dans les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}'$ sont semblables ($\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}'})^{-1} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}'}$), donc

$$\boxed{M_a \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$$

Exercice 2

1. Soit $x \geq 0$.
   $t \longmapsto \varphi_x(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues (exponentielle et fonction affine) dont le dénominateur ne s'annule pas ($1 + xt \geq 1$ donc différent de 0).
   Au voisinage de $+\infty$,
   $0 \leq t^2\varphi_x(t) \leq t^2 e^{-t}$
   Par croissances comparées, $t^2 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par domination, φ_x l'est aussi.
   Il n'y a pas de problème de convergence en 0 puisque la fonction y est continue, donc φ_x est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $f(x)$ existe, quel que soit $x \geq 0$.
   $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^+.}$
2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $x < y$.
$$\begin{aligned} \forall t \geq 0,\ xt &\leq yt \\ 1 + xt &\leq 1 + yt \\ \frac{1}{1+yt} &\leq \frac{1}{1+xt} \quad \text{car } u \longmapsto \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\\ \varphi_y(t) &\leq \varphi_x(t) \quad \text{car } e^{-t} \geq 0 \end{aligned}$$
   Par croissance de l'intégrale ($0 < +\infty$), $f(y) \leq f(x)$.
   $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+.}$
3. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+nt}\ dt.$
   Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+nt}$.
   - φ_n est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $1 + nt \to +\infty$. $\varphi_n(0) = 1$, donc (φ_n) converge simplement vers la fonction $\psi : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
   - Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[,\ |\varphi_n(t)| \leq e^{-t}$ et $t \longmapsto e^{-t}$ est continue, intégrable sur $[0, +\infty[$.

   D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que les fonctions φ_n et ψ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et que :
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_0^{+\infty} \psi(t)\ dt.$$
   On pouvait aussi dire que la suite $(f(n))$ est décroissante minorée par 0.
   $\boxed{(f(n)) \text{ converge.}}$

   (b) $\int_0^{+\infty} \psi(t)\ dt = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0$, $\boxed{(f(n)) \text{ converge vers } 0.}$

   (c) f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite α en $+\infty$ ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$). Par composition des limites, la suite $(f(n))$ converge vers α. Par unicité de la limite, on a donc : $\alpha = 0$ et $\boxed{\lim_{+\infty} f = 0.}$

Exercice 3

1. • $0 < a_0 \leq 1$ car $a_0 = 1$
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $0 < a_k \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, n]\!],\ -n &\leq -k \leq 0 \\
2 &\leq n - k + 2 \leq n + 2 \\
\frac{1}{n+2} &\leq \frac{1}{n-k+2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{car } u \longmapsto \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur } [2, +\infty[\\
0 < \frac{a_k}{n-k+2} &\leq \frac{a_k}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{car } 0 < a_k \leq 1
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \\
0 < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} &\leq \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2} \\
0 < a_{n+1} &\leq 1
\end{aligned}$$

   • Par principe de récurrence (forte) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0, 1].}$

2. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leq 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$ dont le rayon de convergence vaut 1.
   $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

3. (a) $\sum \frac{x^n}{n+2}$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{n}{n+2} x^n$, et donc que $\sum x^n$ puisque $\frac{n}{n+2} \sim 1$:
   $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{x^n}{n+2} \text{ vaut 1.}}$

   (b) On en déduit que :
   — pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ converge,
   — pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| > 1$, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ diverge.

   Par ailleurs, pour $x = 1$, $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge car $\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et la série harmonique diverge.
   Pour $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées ($(\frac{1}{n+2})$ tend vers 0 en décroissant).

   Par conséquent, $\boxed{x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est uniquement définie sur } [-1, 1[.}$

   (c) Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence. Comme ce minimum vaut 1,
   $\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$ et,
   $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n+2-k} = (n+1) a_{n+1}.$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1) a_{n+1}.}$

(d)

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[\ f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\\ &= f'(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, a_0 > 1$, donc $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > 0$ et $f(x) > 0$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[,\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\\ \int_0^x \frac{f'(u)}{f(u)}\ du &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+2}\ du\\ [\ln(f(u))]_0^x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

car on peut intégrer terme à terme la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Or $f(0) = 1$ et $\ln(f(0)) = 0$,

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.}$$

5.

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2}\\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} u^n\ du - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x u^{n+1}\ du\ ^1\\ &= \int_0^x \frac{1}{1-u}\ du - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u}{1-u}\ du\\ &= [-\ln|1-u|]_0^x \frac{1}{x}[-u-\ln(|1-u|]_0^x\\ &= -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}\\ \ln(f(x)) &= \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1.}$$

6. $\frac{1}{2} \in [0,1[$, donc $\sum a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n} = \frac{e}{2}.}$$

Exercice 4

1. (a) $\star$ Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^{k-1} \in F$ et $M^k \in F$.

   - $M^0 = I_n \in F$ et $M^1 = M \in F$. La propriété est vérifiée pour $n = 1$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que M^{k-1} et M^k appartiennent à F, donc que $\mathrm{Vect}(M^{k-1}, M^k) \subset F$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^2.M^{k-1} \\ &= (3M - I_n).M^{k-1} \\ &= 3M^k - M^{k-1} \in \mathrm{Vect}(M^{k-1}, M^k) \end{aligned}$$

   M^k et M^{k+1} appartiennent à F, donc

   - par principe de récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, M^k \in F}$

   $\star$ M^2 est une combinaison linéaire de I_n et de M donc $F = \mathrm{Vect}(I_n, M)$.
   Si I_n et M sont liées, comme $I_n \neq (0)$:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = \lambda I_n$$

   Comme $2M^2 = 3M - I_n$, on a :

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 I_n &= 3\lambda I_n - I_n \\ 2\lambda^2 &= 3\lambda - 1 \end{aligned}$$

   d'où $(2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$. Ceci n'est pas possible car $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$.
   Ces deux matrices forment une famille libre et donc une base de F.
   $\boxed{\dim F = 2 \text{ et une base de } F \text{ est } (I_n, M).}$

   (b) Soit $A, B \in F$.
   $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}\ A = a_1 I_n + a_2 M$ et $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}\ B = b_1 I_n + b_2 M$.

$$AB = (a_1 I_n + a_2 M)(b_1 I_n + b_2 M)$$
$$a_1 b_1 I_n + (a_1 b_2 + a_2 b_1) M + a_2 b_2 M^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$$

   $AB \in F$, donc $\boxed{F \text{ est stable pour la mutliplication des matrices.}}$

   (c) Soit $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$. A et B sont des éléments de F, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda A + \mu B &= (0) \\ \lambda(M - I_n) + \mu(M - \frac{1}{2} I_n) &= (0) \\ (\lambda + \mu) M - \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) I_n &= (0) \end{aligned}$$

   (I_n, M) est libre donc $\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = 0 \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\mu = 0 \\ \mu = -\frac{\mu}{2} \end{array} \right.$, d'où $\lambda = \mu = 0$.
   (A, B) est une famille libre de F de cardinal 2, comme F est de dimension 2,

$\boxed{\mathcal{B} = (A, B) \text{ est une base de } F.}$

$$\begin{aligned} BA &= AB \quad \text{car } M \text{ et } I_n \text{ commutent} \\ &= (M - I_n)(M - \frac{3}{2}I_n) \\ &= M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n \\ &= (0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (M - I_n)^2 \\ &= (M - I_n)(M - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_n) \\ &= AB - \frac{1}{2}A \\ &= \frac{-1}{2}A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (M - \frac{1}{2}I_n)^2 \\ &= (M - \frac{1}{2}I_n)(M - I_n + \frac{1}{2}I_n) \\ &= BA + \frac{1}{2}B \\ &= \frac{1}{2}B \end{aligned}$$

$\boxed{AB = BA = (0),\ A^2 = \frac{-1}{2}A,\ B^2 = \frac{1}{2}B.}$

(d) Soit $T \in F : \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ T = \alpha A + \beta B$.
$T^2 = (\alpha A + \beta B)^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B^2$
$T^2 = \frac{1}{2}(-\alpha A + \beta B)$ d'après la question précédente.

$$\begin{aligned} T^2 = M &\iff \frac{1}{2}(-\alpha A + \beta B) = -A + 2B \quad \text{car } M = -A + 2B \\ &\iff \begin{cases} \frac{-\alpha^2}{2} = -1 \\ \frac{\beta^2}{2} = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 = 2 \\ \beta^2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{2} \\ \beta = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions de } T^2 = M \text{ sont } \sqrt{2}A + 2B, \sqrt{2}A - 2B, -\sqrt{2}A + 2B \text{ et } -\sqrt{2}A - 2B.}$

2. (a) (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
L'équation caractéristique associée $2x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes : 1 et $\frac{1}{2}$ $(2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1))$, donc

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \alpha(\frac{1}{2})^n + \beta 1^n.$$

Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $((X=n))$ forme un système complet d'évènements et
$1=P(\Omega)=\sum_{n=0}^{+}\infty P(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\frac{1}{2^n}+\beta)$.
Nécessairement, $\beta=0$ (p_n est le terme général d'une série convergente, (p_n) converge vers 0) et $\alpha\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$, d'où $\alpha=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=p_n=\frac{1}{2^{n+1}}.}$

(b) $\sum n\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\sum n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}}$ correspondent aux dérivées d'une série entière géométrique évaluée en $\frac{1}{2}$ ($|\frac{1}{2}|<1$), ces séries sont convergentes, des combinaisons linéaires de ces séries sont convergentes, donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance}}$:
$E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}nP(X=n)=\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=1$ et
$E(X(X-1)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)P(X=n)=\frac{1}{2^3}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{1}{8}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}=2$
$V(X)=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=2+1-1=2$.

$\boxed{E(X)=1 \text{ et } V(X)=2.}$

Exercice 5

1.
   - Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, P',P'',Q',Q'' le sont aussi et $<P,Q>$ est un réel comme de produits de nombres réels.
     $(P,Q)\longmapsto<P,Q>$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - La multiplication des réels est commutative donc $<\ ,\ >$ est symétrique.
   - La multiplication des réels est distributive par rapport à l'addition, la dérivée est linéaire, donc $<\ ,\ >$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et est bilinéaire.
   - Soit $P\in E$. $<P,P>=P(1)^2+P'(1)^2+P''(1)^2\geq 0$
     Si $<P,P>=0$, alors $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ (une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul)
     1 est une racine d'ordre au moins 3 de P, qui est de degré inférieur ou égal à 2 :
     $$\exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P(X)=(X-1)^3Q(X),$$
     $3+\deg(Q)\leq 2$, donc $\deg(Q)\leq 0$ et $Q=0$. Par conséquent, $P=0$.
     $<\ ,\ >$ est donc définie positive.

   $\boxed{<\ ,\ > \text{ est bien un produit scalaire.}}$

2. Utilisons le procédé d'orthonormalisation sur $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$.
   - Posons $R_0=1$.
     $<R_0,R_0>=1+0+0$, on choisit $\boxed{P_0=1}$.
   - On pose $R_1=X-\alpha P_0$.
     $<P_0,R_1>=<P_0,X>-\alpha<P_0,P_0>=<P_0,X>-\alpha$
     $<P_0,R_1>=0\iff\alpha=<P_0,X>$. $<P_0,X>=1.1+0.1+0.0=1$, on choisit $R_1=X-1$
     $<R_1,R_1>=0^2+1^2+0^2$, doù, $\boxed{P1=X-1}$.

- On pose $R_2 = X^2 - \alpha P_0 - \beta P_1$.
  $< P_0, R_2 >=< P_0, X^2 > -\alpha < P_0, P_0 > -\beta < P_0, P_1 >=< P_0, X^2 > -\alpha.1 - \beta.0$
  $< P_1, R_2 >=< P_1, X^2 > -\alpha < P_1, P_0 > -\beta < P_1, P_1 >=< P_0, X^2 > -\alpha.0 - \beta.1$
  $\left\{\begin{array}{l} < P_0, R_2 >= 0 \\ < P_1, R_2 >= 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha =< P_0, X^2 > \\ \beta =< P_1, X^2 > \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1.1 + 0.2 + 0.2 = 1 \\ \beta = 0.0 + 1.2 + 0.2 = 2 \end{array}\right.$
  On choisit $R_2 = X^2 - 2(X-1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
  $< R_2, R_2 >= 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4$, on pose $\boxed{P_2 = \frac{1}{2}(X-1)^2}$.

$\boxed{\left(1, X-1, \frac{(X-1)^2}{2}\right) \text{ est une base orthonormée de } E \text{ pour le produit scalaire } < \, , \, >.}$

3. (P_0, P_1) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$. On a :
   $d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = ||X^2 - 4 - p(X^2 - 4)||$ et $p(X^2 - 4) =< X^2 - 4, P_0 > P_0 + < X^2 - 4, P_1 > P_1$.
   $< X^2 - 4, P_0 >= -3.1 + 2.0 + 2.0 = -3$ et $< X^2 - 4, P_1 >= -3.0 + 2.1 + 2.0 = 2$,
   d'où $p(X^2 - 4) = -3P_0 + 2P_1 = -3 + 2(X-1) = 2X - 5$.
   $d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = ||X^2 - 2X + 1|| = ||R_2|| = 2$. $\boxed{d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = 2}$

4. (a) Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$. f est linéaire et $H = \ker(f)$ est bien un sous-espace vectoriel.
   De plus, f est une forme linéaire non nulle ($f(1) = 1 \neq 0$), donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. D'après le théorème du rang (E est de dimension finie 3),
   $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.
   $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension } 2.}$

   (b) Soit φ la projection orthogonale sur H.
   (P_1, P_2) est une famille de polynômes de H qui forme une famille libre (degrés échelonnnés) de cardinal 2 : c'est donc une base de H. De plus, $1 \in H^\perp$ ($1 \perp P_1$ et $1 \perp P_2$).
   $\varphi(1) = 0, \varphi(P_1) = P_1$ et $\varphi(P_2) = P_2$.
   $\varphi(X) = \varphi(P_1 + 1) = P_1 = X - 1$ et $\varphi(X^2) = \varphi(2P_2 + 2P_1 + 1) = 2P_2 + 2P_1 = X^2 - 1$, d'où
   $$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$