Mathématiques

Concours ATS 2012
Proposition de corrigé

Exercice 1

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle de la suite est donc

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

2. On obtient $\boxed{X_n = A^n X_0}$

3. On obtient, par calcul matriciel, $AE_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_1$. Comme E_1 est différent du vecteur nul, cela signifie que $\boxed{E_1 \text{ est vecteur propre de } A\text{, associé à la valeur propre } \lambda_1 = -1.}$

4. (a) En notant I la matrice identité, le polynôme caractéristique P_A de la matrice A est donné par

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 3 \\ -4 & 1-\lambda & 4 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ -\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 + C_3 \to C_1 \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 - L_1 \to L_3
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda)}$$

   (b) Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique P_A, d'où $\boxed{\text{la matrice } A \text{ admet trois valeurs propres distinctes } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1.}$

   (c) Le vecteur propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ vérifie $AE_2 = 0E_2$ c'est-à-dire, en posant $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, qu'il faut résoudre le système $\begin{cases} -3 + \alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \\ -4 + \alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \\ -2 + \alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$

   Ce système devient $\begin{cases} \alpha_2 + 3\beta_2 = 3 & L_1 \\ \alpha_2 + 4\beta_2 = 4 & L_2 \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = 2 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 + 3\beta_2 = 3 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ \beta_2 = 1 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ \beta_2 = 1 & L_3 \longleftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Le vecteur } E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A\text{, associé à la valeur propre } \lambda_2 = 0.}$$

(d) En procédant de la même façon pour la valeur propre $\lambda_3 = 1$, et en posant $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, il faut résoudre le système $\begin{cases} -3 + \alpha_3 + 3\beta_3 = 1 \\ -4 + \alpha_3 + 4\beta_3 = \alpha_3 \\ -2 + \alpha_3 + 2\beta_3 = \beta_3 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha_3 + 3\beta_3 = 4 \\ \quad 4\beta_3 = 4 \\ \alpha_3 + \ \beta_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Le vecteur } E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A\text{, associé à la valeur propre } \lambda_3 = 1.}$$

5. La matrice carrée d'ordre 3, A, admet trois valeurs propres réelles distinctes, par conséquent, grâce à la condition suffisante de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable et A est semblable à la matrice D indiquée avec P matrice de passage, donc inversible, matrice formée des vecteurs E_1, E_2, E_3. On a donc

$$\boxed{A = PDP^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. On a, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad A^n = PD^nP^{-1}}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En particulier pour $n \geqslant 1$, $n = 2k-1$, $A^{2k-1} = PD^{2k-1}P^{-1}$ avec $D^{2k-1} = D$, d'où $A^{2k-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k > 0, \quad A^{2k-1} = A.}$

On a $A^{2k} = A \times A^{2k-1} = A \times A$ d'où $\boxed{A^{2k} = A^2}$

Un calcul immédiat nous donne

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

7. (a) En utilisant la relation obtenue à la question 2 pour $n = 2k$, on obtient $X_{2k} = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_{2k} = v_{2k} = w_{2k} = 1$.

De même, on a pour $n = 2k-1$, $X_{2k-1} = AX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_{2k-1} = v_{2k-1} = w_{2k_1} = 1$.

Par conséquent, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n = w_n = 1}$

(b) D'après la question précédente,

$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont constantes à partir du rang } n = 1}$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1}$$

8. En procédant de façon identique, on obtient, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{2k} = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{2k} = 1 \\ v_{2k} = 2 \\ w_{2k} = 0 \end{cases}}$$

De même, on a pour $n = 2k-1$, $X_{2k-1} = AX_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{2k-1} = -1 \\ v_{2k-1} = -2 \\ w_{2k-1} = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Les deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ n'ont pas de limite et } \lim_{n\to+\infty} w_n = 0.}$

9. En procédant une nouvelle fois de la même façon, en posant $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, on obtient avec $X_{2k} = A^2X_0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{cases} u_{2k} = -u_0 + v_0 + w_0 \\ v_{2k} = v_0 \\ w_{2k} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}}$$

et avec $X_{2k-1} = AX_0$,

$$\boxed{\begin{cases} u_{2k-1} = -3u_0 + v_0 + 3w_0 \\ v_{2k-1} = -4u_0 + v_0 + 4w_0 \\ w_{2k-1} = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}}$$

Les suites d'indice pair et impair étant constantes, ces trois suites sont convergentes si et seulement si les termes d'indice pair et impair sont égaux, c'est-à-dire que u_0, v_0 et w_0 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -3u_0 + v_0 + 3w_0 & = -u_0 + v_0 + w_0 \\ -4u_0 + v_0 + 4w_0 & = v_0 \\ -2u_0 + v_0 + 2w_0 & = -2u_0 + v_0 + 2w_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire après simplification $u_0 = w_0$.

$\boxed{\text{Les trois suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes si et seulement } u_0 = w_0.}$

Dans ce cas, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n = w_n = v_0}$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = v_0}$$

Exercice 2

1. Les deux premières questions peuvent être traitées simultanément.
Démontrons l'existence de la suite de fonctions polynômes par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$. $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = (-1)^0 \times 1 \times \varphi(x)$. Ainsi $P_0(x) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n et démontrons-la vraie au rang $n+1$. Supposons donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P_n, tel que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\varphi(x)$. Ainsi en dérivant à nouveau on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}(x)\right)' &= ((-1)^n P_n(x)\varphi(x))' = (-1)^n P_n'(x)\varphi(x) + (-1)^n P_n(x)\varphi'(x) \\ &= (-1)^{n+1}(-P_n'(x))\varphi(x) + (-1)^n P_n(x)(-1)P_1(x)\varphi(x) \end{aligned}$$

cette dernière expression peut s'écrire
$(-1)^{n+1}(-P_n'(x))\varphi(x) + (-1)^n P_n(x)(-1)P_1(x)\varphi(x) = (-1)^{n+1}(-P_n'(x) + P_1(x)P_n(x))\varphi(x)$. On a ainsi la relation voulue en posant $P_{n+1}(x) = -P_n'(x) + P_1(x)P_n(x)$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et tout } n \in \mathbb{N}\ \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\varphi(x).}$$

Calculons maintenant P_1 et P_2.
$\varphi^{(1)}(x) = \varphi'(x) = \dfrac{-2x}{2}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = -x\varphi(x) = (-1)^1 x\varphi(x)$. Ainsi $\boxed{P_1(x) = x}$.
$\varphi^{(2)}(x) = (\varphi'(x))' = -x\varphi'(x) - \varphi(x) = x^2\varphi(x) - \varphi(x) = (-1)^2(x^2-1)\varphi(x)$. Ainsi $\boxed{P_2(x) = x^2 - 1}$.

2. On a démontré dans la récurrence précédente que $P_{n+1}(x) = P_1(x)P_n(x) - P_n'(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$ grâce au calcul de $P_1(x)$. On a ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = xP_n'(x) - P_n'(x).}$
Justifions par récurrence sur n que P_n est de degré n et unitaire (cela signifie que son coefficient dominant $a_n = 1$).
Pour $n = 0$ et $n = 1$, P_0 est bien unitaire, pair et de degré 0, P_1 est unitaire, impair et de degré 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit de degré n, de même parité que n et unitaire et démontrons que P_{n+1} est de degré $n+1$, de même parité que $n+1$ et unitaire.
Puisque P_n est de degré n, P_n' est de degré $n-1$. Puisqu'en plus P_n est unitaire, alors xP_n est unitaire et de degré $n+1$. La différence de xP_n et de P_n' est donc un polynôme de degré $n+1$ dont le coefficient dominant est celui de xP_n. Le polynôme obtenu est ainsi unitaire.
Puisque P_n est de même parité que n, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Ainsi $-P_n'(-x) = (-1)^n P_n'(x)$ et donc
$$\begin{aligned} P_{n+1}(-x) &= (-x)P_n(-x) - P_n'(-x) = -x(-1)^n P_n(x) + (-1)^n P_n'(x) \\ &= (-1)^{n+1}(xP_n(x) - P_n'(x)) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(x). \end{aligned}$$
La propriété est ainsi vérifiée.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P_n \text{ est de degré } n\text{, de même parité que } n \text{ et unitaire.}}$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on applique la formule démontrée à la question précédente :
$P_3(x) = xP_2(x) - P_2'(x) = x(x^2-1) - 2x = x^3 - 3x$.
$P_4(x) = xP_3(x) - P_3'(x) = x(x^3-3x) - (3x^2-3) = x^4 - 6x^2 + 3$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = x^2$. L'équation $P_4(x) = 0$ s'écrit donc $X^2 - 6X + 3 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = 36 - 12 = 24$. Les solutions de cette nouvelle équation sont donc
$$X_1 = \frac{6-\sqrt{24}}{2} = 3 - \sqrt{6} \text{ et } X_2 = \frac{6+\sqrt{24}}{2} = 3 + \sqrt{6}.$$
Ces deux solutions étant positives, le polynôme P_4 admet quatre racines réelles : $\sqrt{X_1}$, $-\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ et $-\sqrt{X_2}$.
$$\boxed{\text{Le polynôme } P_4 \text{ admet quatre racines réelles } \sqrt{3-\sqrt{6}},\ -\sqrt{3-\sqrt{6}},\ \sqrt{3+\sqrt{6}} \text{ et } -\sqrt{3+\sqrt{6}}.}$$
5. On considère un entier naturel n.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^k \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = 0$ car la fonction puissance est négligeable devant la fonction exponentielle en l'infini. Puisque P_n est un polynôme, on a donc également
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = 0.}$$
   Plaçons-nous maintenant dans le cas où $n > 0$ et considérons deux réels positifs a et b. Puisque la fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues, elle l'est en particulier sur $[-b, a]$. Pour calculer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$, nous allons évaluer la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_{-b}^{a} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ quand a et b tendent vers l'infini.
   $\displaystyle\int_{-b}^{a} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{a} -\varphi_{n-1}'(x)\,\mathrm{d}x = [-\varphi_{n-1}(x)]_{-b}^{a} = \varphi_{n-1}(-b) - \varphi_{n-1}(a)$
   Or on a montré que
   $$\lim_{a\to+\infty} \varphi_{n-1}(a) = \lim_{x\to+\infty} P_{n-1}(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \text{ et que } \lim_{b\to+\infty} \varphi_{n-1}(-b) = \lim_{x\to-\infty} P_{n-1}(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = 0.$$

Ceci permet de conclure que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

(b) Justifions préalablement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour k et n deux entiers quelconques. La fonction $x \mapsto x^k\varphi_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, $x^k\varphi_n(x)$ est équivalent à $(-1)^n\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}x^{n+k}$ qui ne change pas de signe et qui est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$. En effet, $\dfrac{(-1)^n\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}x^{n+k}}{\frac{1}{x^2}} = (-1)^n\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}x^{n+k+2}$ a une limite nulle en $\pm\infty$. Puisque les intégrales de Riemann $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ convergent, on a la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour réaliser l'intégration par parties, considérons à nouveau deux réels positifs a et b et procédons ensuite à la limite quand a et b tendent vers l'infini.

$$\int_{-b}^{a} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-x^k\varphi_{n-1}(x)\Big]_{-b}^{a} - \int_{-b}^{a} kx^{k-1}(-\varphi_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x$$

en posant $u = x^k$, $u' = kx^{k-1}$, $v = -\varphi_{n-1}(x)$ et $v' = \varphi_n(x)$. Ainsi on a

$$\int_{-b}^{a} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = -a^k\varphi_{n-1}(a) + (-b)^k\varphi_{n-1}(-b) + k\int_{-b}^{a} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

On fait tendre a et b vers l'infini et on utilise le fait que $x^k\varphi_{n-1}(x)$ a une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$, pour obtenir la relation : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Procédons par récurrence sur k.

Pour $k = 0$, on a d'une part : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = 0$ d'après la question 5a, et d'autre part $0!\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-0}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ d'après la question 5a.

Soit $0 \leqslant k < n$. Supposons maintenant l'égalité vraie au rang k et démontrons la vraie au rang $k+1$. D'après la question 5b, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = (k+1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, $k \leqslant n-1$, donc on utilise l'hypothèse de récurrence pour justifier que la seconde intégrale est égale à $k!\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{(n-1)-k}(x)\,\mathrm{d}x$.

On a alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = (k+1)k!\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}\varphi_{n-k-1}(x)\,\mathrm{d}x = (k+1)!\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1}\varphi_{n-(k+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

qui est l'égalité voulue. Par récurrence, on a donc montré que :

$$\boxed{\text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Traitons maintenant les deux cas selon que k soit égal ou non à n.

– Si $k < n$, alors d'après la formule démontrée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$ or $n-k > 0$ donc d'après la question 5a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

– Si $k = n$, alors d'après la formule démontrée précédemment
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-n}(x)\,\mathrm{d}x = n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) = An!$$
en notant A l'intégrale.
Remarquons que φ est strictement positive (et continue) donc l'intégrale est également strictement positive.

Ainsi on a :
$$\boxed{\text{Pour } k < n,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0} \text{ et}$$
$$\boxed{\text{Pour } k = n,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = An! \text{ avec } A = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0.}$$

(d) Ce n'est pas précisé dans l'énoncé mais m est un entier.
Plaçons nous dans le cas où $m < n$ et considérons a un réel positif.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$
par définition de φ_n.
On sait que P_n est un polynôme unitaire de degré n, notons alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ (les b_k sont des coefficients réels avec $b_n = 1$)
Pour évaluer l'intégrale impropre, calculons
$$\int_{-b}^{a} P_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{a} \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} b_k \int_{-b}^{a} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$
par linéarité de l'intégrale.
Or, lorsqu'on fait tendre a et b vers l'infini, chacune des intégrales $\int_{-b}^{a} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ a une limite nulle car $k \leqslant m < n$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ d'après la question précédente. On a ainsi une somme d'éléments nuls, elle est donc nulle.
$$\boxed{\text{Si } m < n,\ \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 \text{ si } m < n}$$
Plaçons nous dans le cas où $m = n$ et considérons a un réel positif.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
par définition de φ_n.
On sait que P_n est un polynôme unitaire de degré n, notons alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ (les b_k sont des coefficients réels avec $b_n = 1$)
Pour évaluer l'intégrale impropre, calculons
$$\int_{-b}^{a} P_n(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{a} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} b_k \int_{-b}^{a} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$
par linéarité de l'intégrale.
Or, lorsqu'on fait tendre a et b vers l'infini, les intégrales $\int_{-b}^{a} x^k \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$ ont une limite nulle si $k < n$ et une limite égale à $An!$ dans le cas où $k = n$. On a ainsi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = b_n An!$$
Comme P_n est unitaire, $b_n = 1$ et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = An!}$$

Exercice 3

1. Soit $t \in [0,1]$.
   - On a : $G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-n|}$. Or $t \leqslant 1$ et $n \geqslant 1$ donc $t \leqslant n$ et $|t-n| = n-t$. On a donc : $\mathrm{e}^{-|t-n|} = \mathrm{e}^{t-n} = \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{-1})^n$, qui est le terme général d'une suite géométrique de raison e^{-1}. Comme $\mathrm{e}^{-1} \in]-1,1[$, la série de terme général $\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{-1})^n$ est convergente, et sa somme vaut :

   $$G(t) = \mathrm{e}^t \sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-1})^n = \mathrm{e}^t \times \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^t \times \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

   On en conclut que :

   $$\boxed{G(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}-1}.}$$

   - On a : $H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k)$ (obtenu par changement d'indice $k=-n$), donc : $H(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t+k|}$. Or $t \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$ donc $t+k \geqslant 0$ et $|t+k| = t+k$. On a donc : $\mathrm{e}^{-|t+k|} = \mathrm{e}^{-(t+k)} = \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^k$, qui est le terme général d'une suite géométrique de raison e^{-1}. Comme $\mathrm{e}^{-1} \in]-1,1[$, la série de terme général $\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^k$ est convergente, et sa somme vaut :

   $$H(t) = \mathrm{e}^{-t} \sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-1})^k = \mathrm{e}^{-t} \times \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{-t} \times \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

   On en conclut que :

   $$\boxed{H(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1}.}$$

2. Soit $t \in [0,1]$. Comme les séries $G(t)$ et $H(t)$ sont convergentes on peut écrire :

   $$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) + \underbrace{f(t)}_{\text{pour } n=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) = H(t) + \mathrm{e}^{-|t|} + G(t).$$

   Or $t \geqslant 0$ donc $|t| = t$, et en utilisant les expressions trouvées à la question 1, on obtient :

   $$\boxed{F(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1} + \mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) + \mathrm{e}^{-t}.}$$

3. Montrons d'abord que F est définie sur $\mathbb{R}$. Pour cela on montre que G et H le sont. On utilise l'inégalité triangulaire :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |t-n| \geqslant |n| - |t| \quad \text{et} \quad |t+n| \geqslant |n| - |t|.$$

   On en déduit que :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e}^{-|t-n|} \leqslant \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-n} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-|t+n|} \leqslant \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-n}.$$

   Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Comme les séries de termes généraux $\mathrm{e}^{-|t-n|}$ et $\mathrm{e}^{-|t+n|}$ sont des séries à termes positifs, et que leurs termes généraux sont majorés par $\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison e^{-1}, on en conclut que ces séries convergent, et donc que $G(t)$ et $H(t)$, puis $F(t)$, sont bien définis.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|-t-n|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t+n|}.$$

En faisant le changement d'indice $k = -n$ on obtient :

$$F(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-k|} = F(t).$$

On en déduit que $\boxed{F \text{ est paire}}$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(t+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+1-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t+1-n|}.$$

En faisant le changement d'indice $k = n-1$ on obtient :

$$F(t+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-k|} = F(t).$$

On en déduit que $\boxed{F \text{ est 1-périodique}}$.

4. À l'aide de la formule (2), on trouve :

$$\boxed{F(0) = F(1) = \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}.}$$

La formule (2) nous permet d'affirmer que F est continue sur $]0,1[$, et continue à droite de 0 et à gauche de 1. Par 1-périodicité, elle est donc continue sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et continue à droite de n et à gauche de $n+1$. De plus, comme $F(0) = F(1)$ et que la fonction F est 1-périodique, on en déduit que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On définit les fonctions $u\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+a^2}(\cos(at) + a\sin(at))$ et $v\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at) + a\sin(at))$ sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+a^2}\Big(\cos(at) + \cancel{a\sin(at)} - \cancel{a\sin(at)} + a^2\cos(at)\Big) = \mathrm{e}^t\cos(at).$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v'(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a^2}\Big(\cos(at) - \cancel{a\sin(at)} + \cancel{a\sin(at)} + a^2\cos(at)\Big) = \mathrm{e}^{-t}\cos(at).$$

6. La fonction F est paire, donc ses coefficients de Fourier $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls. On en déduit que la série de Fourier de F peut s'écrire

$$\boxed{S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nt)},$$

où :

$$\boxed{a_0 = \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 2\int_0^1 F(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t.}$$

7. On commence par réécrire l'expression de F sur $[0,1]$ obtenue à la question 2 :

$$\forall t \in [0,1], \quad F(t) = \frac{1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) + \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

On calcule alors a_0 :

$$a_0 = \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{e}-1}(\mathrm{e}-1) + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1-\mathrm{e}^{-1}).$$

On trouve donc :

$$\boxed{a_0 = 2.}$$

Ensuite on utilise les résultats de la question 5 pour calculer les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de F. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n = 2\int_0^1 F(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\mathrm{e}-1}\int_0^1 \mathrm{e}^t\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc :

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{e}-1}\left[\frac{\mathrm{e}^t}{1+4\pi^2n^2}(\cos(2\pi nt) + 2\pi n\sin(2\pi nt))\right]_0^1 + \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+4\pi^2n^2}(-\cos(2\pi nt) + 2\pi n\sin(2\pi nt))\right]_0^1.$$

En utilisant le fait que $\sin(n\pi) = 0$ et que $\cos(2\pi n) = 1$ pour tout entier n, on trouve :

$$\boxed{a_n = \frac{4}{1+4\pi^2n^2}.}$$

8. La fonction F est périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (en effet elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ au vu de l'expression (2), et les nombres dérivés à droite de 0 et à gauche de 1 existent et sont finis (ils valent respectivement -1 et 1)), donc le théorème de Dirichlet s'applique et permet d'affirmer que la série de Fourier $S(t)$ de F est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme vaut $F(t)$. On a donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = 2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi nt)}{1+4\pi^2n^2}.}$$

9. On applique le résultat de la question 8 en $t = 0$. On trouve :

$$\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1} = 2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2} = \frac{3-\mathrm{e}}{4(\mathrm{e}-1)}.}$$

10. On applique le théorème de Parseval :

$$\int_0^1 F^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

On obtient donc :

$$M = 4 + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+4\pi^2n^2)^2}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+4\pi^2n^2)^2} = \frac{M-4}{8}.}$$

On peut calculer M. On trouve : $M = \dfrac{\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)^2}$.

Exercice 4

1. La courbe $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $y^2 = x$, c'est-à-dire : $y^2 = 2px$ avec $p = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{$\mathcal{P}$ est la parabole de foyer de coordonnées } \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right) \text{ et de directrice la droite d'équation } x = -\frac{p}{2}, \text{ c'est-à-dire } x = -\frac{1}{4}.}$$

2. Les applications $x : t \mapsto t^2$ et $y : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout t réel $(x'(t), y'(t)) = (2t, 1) \neq (0, 0)$: tous les points de la parabole sont des points réguliers, et $(x'(t), y'(t))$ est un vecteur directeur de la tangente au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

$$\boxed{\text{On peut prendre : } \overrightarrow{T}(t)(2t, 1) \text{ et } \overrightarrow{N}(t)(-1, 2t).}$$

3. T_A est la droite passant par $A(a^2, a)$ et dirigée par $\overrightarrow{T}(a)(2a, 1)$.
Soit $E(x, y)$, E appartient à T_A si et seulement si $\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{T}(a)) = 0$.
Or :

$$\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{T}(a)) = \begin{vmatrix} x - a^2 & 2a \\ y - a & 1 \end{vmatrix} = x - a^2 - 2ay + 2a^2 = x - 2ay + a^2$$

$$\boxed{T_A \text{ a pour équation : } x - 2ay + a^2 = 0.}$$

Quelle que soit la valeur du paramètre réel a, T_A n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, donc le point A' intersection de T_A avec l'axe des abscisses existe bien. Les coordonnées de A' sont le couple solution du système : $\begin{cases} x - 2ay + a^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } A' \text{ sont } (-a^2, 0).}$$

En substituant le paramètre b au paramètre a, on a de même :

$$\boxed{T_B \text{ a pour équation : } x - 2by + b^2 = 0. \text{ Les coordonnées de } B' \text{ sont } (-b^2, 0).}$$

4. $\boxed{\text{Les coordonnées de } I, \text{ milieu du segment } [AB], \text{ sont } \left(\frac{a^2 + b^2}{2}, \frac{a + b}{2}\right).}$

5. $a \neq b$ donc les vecteurs $\overrightarrow{T}(a)(2a, 1)$ et $\overrightarrow{T}(b)(2b, 1)$ ne sont pas colinéaires : les deux tangentes T_A et T_B ne sont pas parallèles et possèdent donc bien un point d'intersection M.
Les coordonnées de M sont le couple solution du système (S) : $\begin{cases} x - 2ay + a^2 = 0 \\ x - 2by + b^2 = 0 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2ay = -a^2 \\ x - 2by = -b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2ay = -a^2 \\ 2(a - b)y = a^2 - b^2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

On rappelle qu'on a bien $a \neq b$ donc on peut diviser la deuxième équation par $2(a - b)$ et en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a\dfrac{a + b}{2} - a^2 \\ y = \dfrac{a + b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ab \\ y = \dfrac{a + b}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } M, \text{ point d'intersection de } T_A \text{ et } T_B, \text{ sont } \left(ab, \frac{a + b}{2}\right).}$$

6. $\boxed{\text{Les points } I \text{ et } M \text{ ont la même ordonnée } \frac{a + b}{2}.}$

7. L'ordonnée de C est égale à celle de I donc C est le point de la parabole $\mathcal{P}$ de paramètre $\dfrac{a+b}{2}$.

$$\boxed{C \text{ a pour coordonnées } \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \frac{a+b}{2}\right).}$$

8. La tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est dirigée par $\overrightarrow{T}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ dont les composantes sont $(a+b, 1)$.

   La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$ de composantes $(b^2-a^2, b-a) = ((b-a)(b+a), b-a)$.

   Comme $\overrightarrow{AB} = (b-a)\overrightarrow{T}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, ces deux vecteurs sont colinéaires.

$$\boxed{T_C \text{ et } (AB) \text{ sont parallèles.}}$$

9. Figure demandée par l'énoncé :

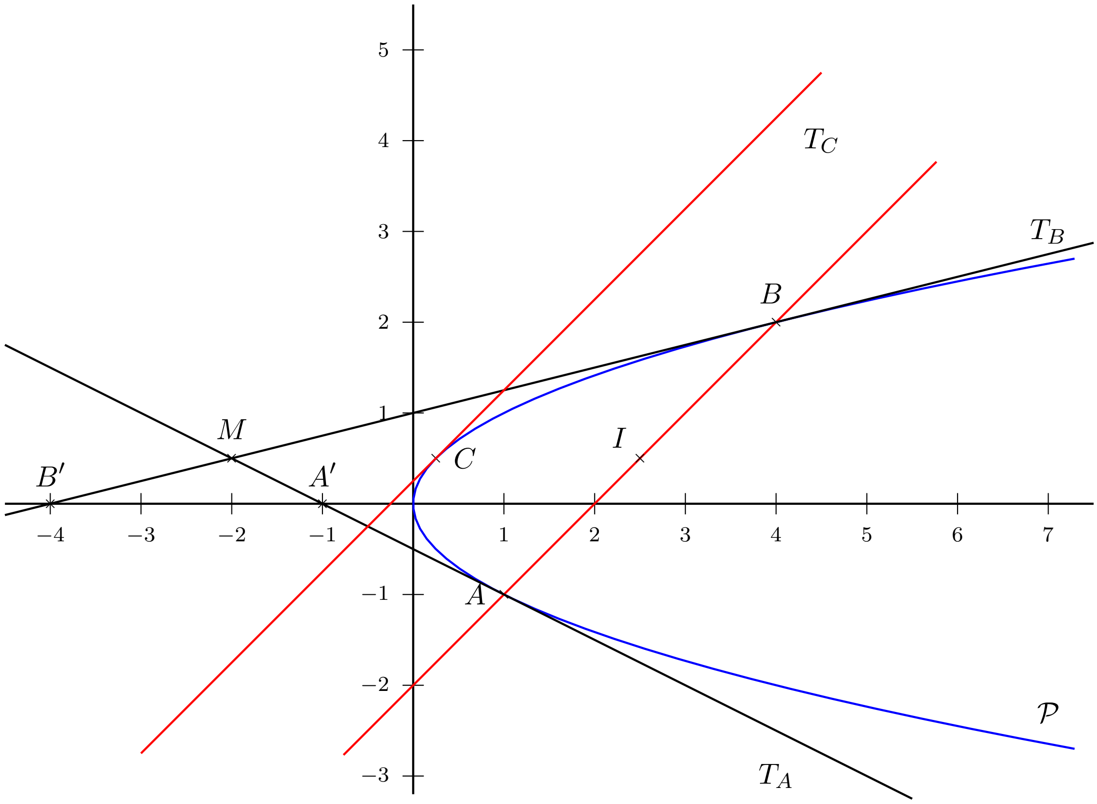

Figure 1 – Représentation graphique de la courbe $\mathcal{P}$