

# Chapitre 13 : Fonctions de plusieurs variables

## 1 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$

### Définition 1 : norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit  $\vec{u} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

On appelle norme euclidienne la norme définie par  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

2. Soit  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $B(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

On appelle distance euclidienne de  $A$  à  $B$  la distance définie par

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

### Remarque

Il existe d'autres normes (et par conséquent d'autres distances associées) dans  $\mathbb{R}^n$ , par exemple :  $\|\vec{u}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  ou  $\|\vec{u}\|_\infty = \text{Max}\{|x_1|; |x_2|; \dots; |x_n|\}$

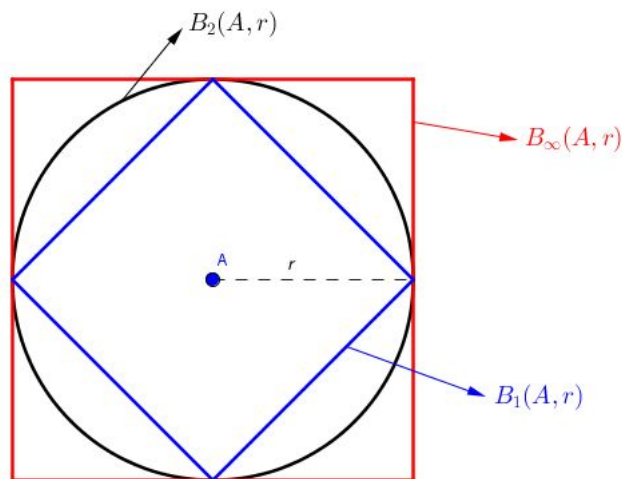
### Définition 2 : boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Soit  $A \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ .

1. On appelle boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble  $B(A, r) = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; d(A, M) < r\}$ .
2. On appelle boule fermée de centre  $A$  et de rayon  $r$  l'ensemble  $\overline{B(A, r)} = \{M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; d(A, M) \leq r\}$ .

### Remarques

1. Dans  $\mathbb{R}$ , la boule ouverte de centre  $A(a)$  et de rayon  $r$  est l'intervalle ouvert  $]a - r, a + r[$  et la boule fermée est l'intervalle  $[a - r, a + r]$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^2$ , la boule ouverte de centre  $A(a_1, a_2)$  et de rayon  $r$  est le disque de centre  $A$  et de rayon  $r$  (disque privé du cercle) et la boule fermée est le disque de centre  $A$  et de rayon  $r$  (y compris le cercle).
3. Dans  $\mathbb{R}^3$ , la boule ouverte de centre  $A(a_1, a_2, a_3)$  et de rayon  $r$  est la boule de centre  $A$  et de rayon  $r$  (boule privée de la sphère) et la boule fermée est la boule de centre  $A$  et de rayon  $r$  (y compris la sphère).
4. Avec d'autres normes, les boules peuvent avoir des formes plus surprenantes... des boules carrées par exemple.

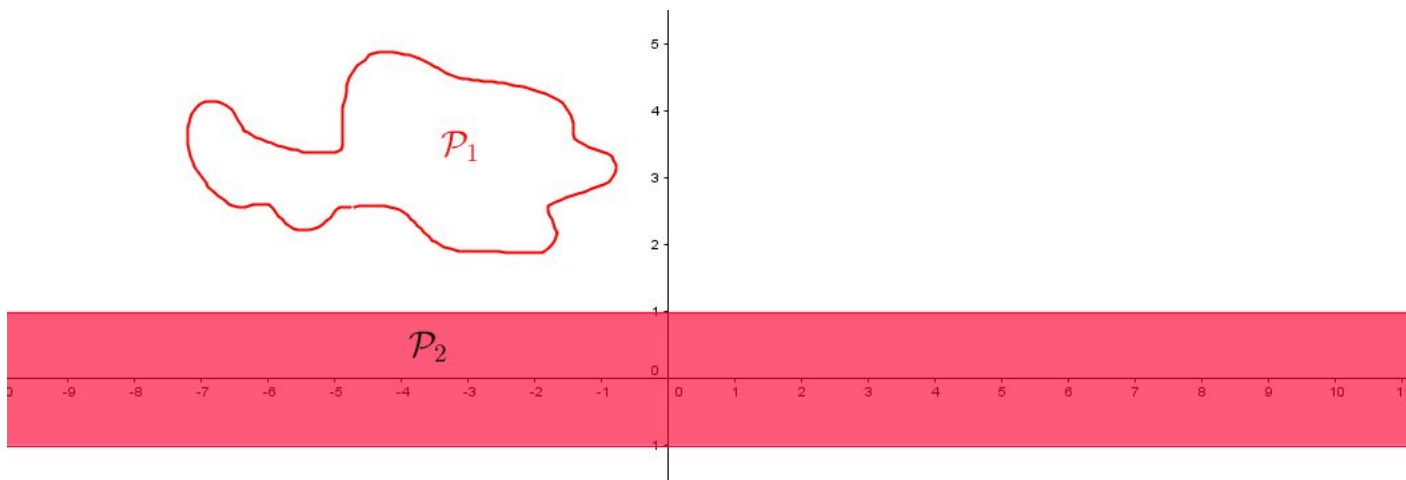


### Définition 3 : partie bornée de $\mathbb{R}^n$

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $\mathcal{P}$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$  s'il existe une boule ouverte contenant  $\mathcal{P}$ .

### Exemple :

Sur la figure ci-dessous,  $\mathcal{P}_1$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{P}_2$  ne l'est pas.



### Définition 4 : partie ouverte et partie fermée de $\mathbb{R}^n$

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ .

On dit que  $\mathcal{P}$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$  si  $\mathcal{P} = \emptyset$  ou, pour tout point  $P$  de  $\mathcal{P}$ , il existe une boule ouverte centrée en  $P$  et contenue dans  $\mathcal{P}$ .

On dit que  $\mathcal{P}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  si son complémentaire est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ .

### Exemples

1. Une boule ouverte est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Une boule fermée est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\mathbb{R}^n$  et  $\emptyset$  sont à la fois des parties ouvertes et fermées de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5 : point intérieur et point extérieur d'une partie de  $\mathbb{R}^n$** 

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ .

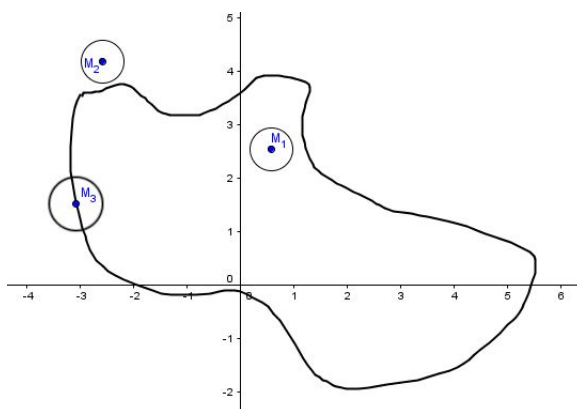
On dit que  $M$  est un point intérieur à  $\mathcal{P}$  s'il existe une boule ouverte centrée en  $M$  incluse dans  $\mathcal{P}$ .

On dit que  $M$  est un point extérieur à  $\mathcal{P}$  s'il existe une boule ouverte centrée en  $M$  incluse dans le complémentaire de  $\mathcal{P}$ .

On dit que  $M$  est un point de la frontière (ou du bord) de  $\mathcal{P}$  si  $M$  n'est ni intérieur ni extérieur à  $\mathcal{P}$ .

**Exemples**

1. Si  $\mathcal{P}$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$  alors tout point de  $\mathcal{P}$  est intérieur à  $\mathcal{P}$ .
2. Sur la figure ci-dessous,  $M_1$  est intérieur à  $\mathcal{P}$ ,  $M_2$  est extérieur à  $\mathcal{P}$  et  $M_3$  est sur la frontière de  $\mathcal{P}$ .

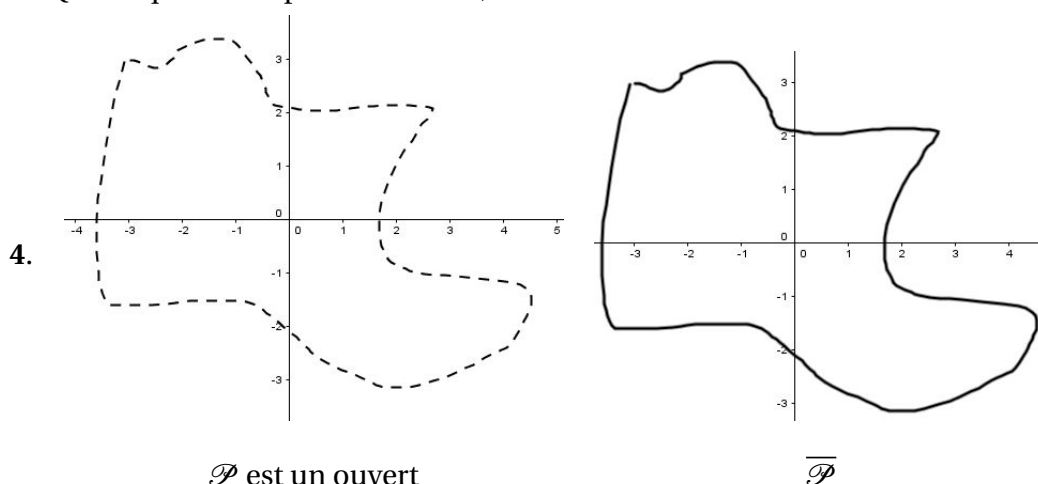
**Définition 6 : adhérence d'une partie de  $\mathbb{R}^n$** 

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ . On appelle adhérence d'une partie de  $\mathbb{R}^n$  le plus petit fermé contenant  $\mathcal{P}$ . L'adhérence de  $\mathcal{P}$  est notée  $\overline{\mathcal{P}}$ .

Un point de  $\overline{\mathcal{P}}$  est appelé point adhérent à  $\mathcal{P}$ .

**Exemples**

1. L'adhérence de la boule ouverte  $B(A, r)$  est la boule fermée  $\overline{B(a, r)}$ .
2.  $\mathcal{P}$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  alors  $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ .
3. Quelle que soit la partie  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ .



## 2 Limites, continuité

On désigne par  $\mathcal{P}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^n$  et on considère une fonction  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Exemple

La fonction

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array}$$

est définie pour les valeurs de  $x$  et  $y$  telles que  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Dans un repère orthonormé, l'ensemble de définition est le disque fermé de centre  $O$  et de rayon 1.

### Définition 7 : limite en un point adhérent

On dit qu'une fonction  $f$  définie au voisinage de  $P \in \overline{\mathcal{P}}$  admet une limite  $\ell$  quand  $M$  tend vers  $P$  si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall M \in \mathcal{P} \|M - P\| < \eta \implies |f(M) - \ell| < \epsilon.$$

### Remarques

- Si la limite existe, elle est unique.
- Les propriétés des opérations sur les limites des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  se prolongent aux fonctions de plusieurs variables.

### Exemples 1

Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en  $(0, 0)$  ?

1.  $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
2.  $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
3.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
4.  $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$

### Définition 8 : continuité en un point

Soit  $P \in \mathbb{R}^n$ . La fonction  $f$  est continue en  $P$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon, P), \forall M \in \mathcal{P} : \|M - P\| \leq \alpha \implies |f(M) - f(P)| < \epsilon$$

### Remarques

1. La notation  $\alpha(\epsilon, P)$  signifie que le réel  $\alpha$  dépend du choix de  $P$  et de celui de  $\epsilon$
2. Le symbole  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 9 : continuité sur une partie**

La fonction  $f$  est dite continue sur  $\mathcal{P}$  si elle est continue en tout point de  $\mathcal{P}$ .

**Exemples 2**

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix} .$$

$$2. f: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ e^y & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix} .$$

$$3. f: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix} .$$

**Définition 10 : fonction bornée sur une partie**

Soit  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ .

La fonction  $f$  est dite bornée sur  $\mathcal{P}$  s'il existe un réel  $K$  tel que :

$$\forall M \in \mathcal{P}, |f(M)| \leq K$$

**Propriété 1 : fonction continue sur un fermé-borné**

$f$  est une fonction continue sur  $\mathcal{P}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $K$  est une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^n$  contenue dans  $\mathcal{P}$ , alors  $f$  atteint son maximum et son minimum sur  $K$ .

Ainsi :  $\exists (A, B) \in K^2, \forall M \in K \quad f(A) \leq f(M) \leq f(B)$ .

**Exemples 3**

$$1. \text{ Soit } f: \begin{matrix} [0; 1] \times [0; 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } y \leq x \end{cases} \end{matrix} .$$

Montrer que la fonction  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $[0; 1] \times [0; 1]$  et les déterminer.

$$2. \text{ Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R}^2 \text{ par : } f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

On désigne par  $(C)$  le cercle unité. Établir que la fonction  $f$  admet un minimum et maximum sur  $(C)$ . Les déterminer.

### 3 Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

#### Définition 11 : dérivées partielles d'ordre 1

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable au point  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow x_i} \frac{f(x_1, x_2, \dots, t, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t - x_i}$$

si cette limite existe.

Sinon, on dit que  $f$  n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable au point  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

#### Remarque

Quand il n'y a que 2 ou 3 variables, on note plutôt  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ou  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ , ...

#### Définition 12 : différentielle en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ .

On appelle différentielle de  $f$  en  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , l'application linéaire notée  $df_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  associe  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u)dx_n$ .

#### Remarque

Pour alléger les notations, on écrit souvent :  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

#### Exemples 4

Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$
2.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

#### Exemples 5

Donner une approximation de la variation de volume d'un cylindre droit de rayon  $r = 10$  cm et de hauteur  $h = 50$  cm quand  $r$  augmente de 1 cm et  $h$  diminue de 2 cm. (on fera le calcul exact de la variation et ensuite une approximation à l'aide de la différentielle).

**Définition 13 : gradient**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{P}$ .

On appelle gradient de  $f$  en  $u$ , noté  $\overrightarrow{\text{Grad}}_u(f)$  ou  $\nabla f(u)$  le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix}$$
**Exemples 6**

Calculer le gradient au point  $(a, b)$  ou au point  $(a, b, c)$  des fonctions définies par :

1.  $f(x, y) = 3x^2y + 7xy^2$ .
2.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Exemples 7**

1. Déterminer, si possible, la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  dont le gradient est égal à  $y^2 \vec{i} + (2xy - 1) \vec{j}$ .
2. Déterminer, si possible, la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  dont le gradient est égal à  $y \vec{i} - x \vec{j}$ .

**Définition 14 : point critique**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{P}$ .

$u$  est appelé point critique si  $\nabla f(u) = \vec{0}$ , soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) = 0.$$

**Définition 15 : fonction de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{P}$ .  
 $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $f$  admet  $n$  dérivées partielles continues sur  $\mathcal{P}$ .

Autrement dit,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  est définie et continue sur  $\mathcal{P}$ .

**Exemples 8**

1. Les fonctions suivantes sont-elles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ? :

a.  $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$

b.  $f(x, y) = \sin(2x - 3y)$

c.  $f(x, y) = e^{x^2 + 3xy}$

d.  $f(x, y, z) = \sin(x^2 - y^2 + z^2)$ .

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

3. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en certains points.

### Propriété 2 : développement limité

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ .  
 $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $u = (u_1, u_2, u_3)$  et

$$f(u_1 + h, u_2 + k, u_3 + l) = f(u_1, u_2, u_3) + h \frac{\partial f}{\partial x}(u) + k \frac{\partial f}{\partial y}(u) + l \frac{\partial f}{\partial z}(u) + o(h, k, l).$$

### Propriété 3 : dérivée et composition

Soient  $x, y, z$  trois fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
 Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
 Soit  $F$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ .  
 Alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$   
 et  $\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$ .

### Remarques

1. Nous avons un énoncé analogue si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. De même si les fonctions  $x, y, z$  sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et non sur  $\mathbb{R}$ .
3. En utilisant la notation différentielle, la propriété s'écrit :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

### Exemples 9

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x \cos y$  où  $x$  et  $y$  sont deux fonctions de  $t$  définies par  $x(t) = t^2$  et  $y(t) = t^3$ .  
 Calculer  $\frac{df}{dt}$ .

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = x \cos y + y \ln(z^2 + 1)$  où  $x, y$  et  $z$  sont trois fonctions de  $t$  définies par  $x(t) = t^2 + 3t$ ,  $y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$  et  $z(t) = e^t$ .  
Calculer  $\frac{df}{dt}$ .

#### Propriété 4 : dérivées partielles et composition

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $u, v$  et  $w$  trois fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in V \quad (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \in U.$$

Alors  $F$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

#### Exemples 10

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, 2uv).$$

- a. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- b. Exprimer  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

- a. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- b. Exprimer  $\frac{\partial g}{\partial r}$  et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

- c. Exprimer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .

#### Définition 16 : fonction de classe $\mathcal{C}^2$

$f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$  si les  $n$  fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Remarque**

La fonction  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  est la  $j^{\text{ème}}$  dérivée partielle de la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle et se note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Il y a donc  $n^2$  dérivées partielles secondes.

**Propriété 5 : théorème de Schwarz**

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $P$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ .

**Exemples 11**

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

a.  $f(x, y) = x^2(x + y)$

b.  $f(x, y) = \cos(xy)$

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$

- b. Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existent et diffèrent.  
Que peut-on en déduire?

## 4 Applications

### 4.1 Extremum d'une fonction de deux variables

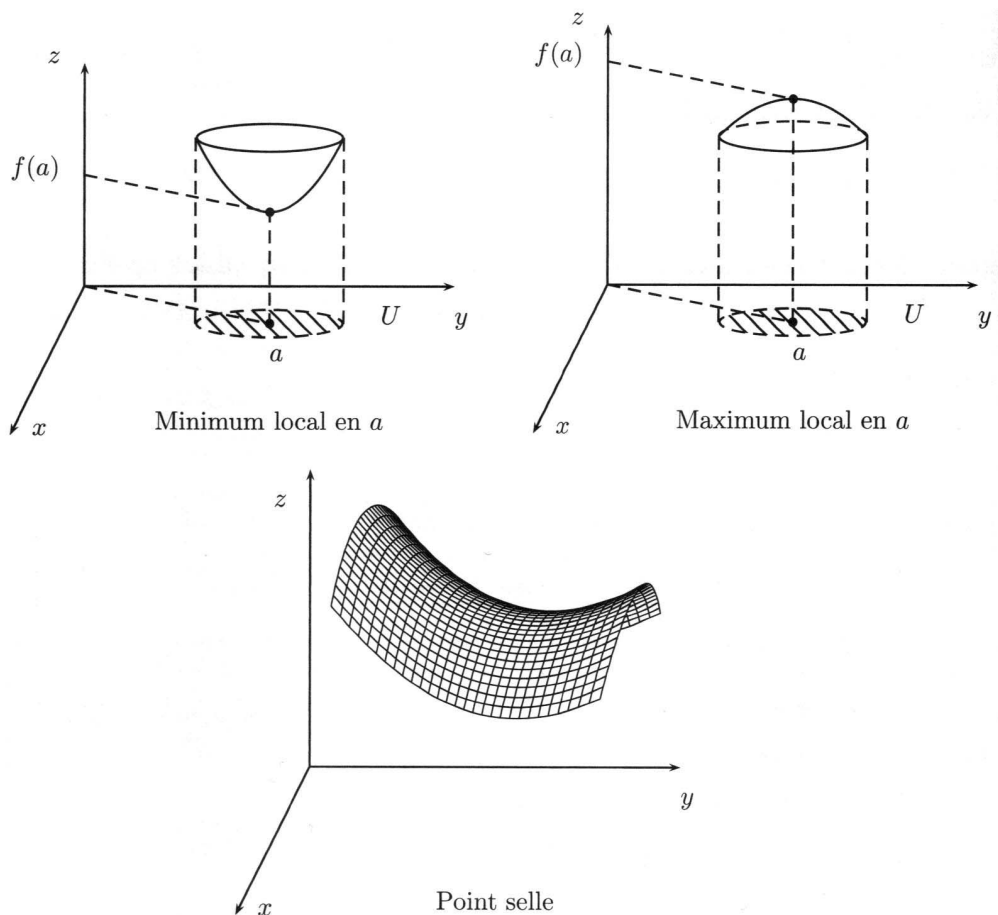
**Propriété 6 : point critique et extremum**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{P}$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $u \in \mathcal{P}$ , alors  $\nabla f(u) = 0$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$ .

**Remarques**

- La condition  $\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$  est une condition nécessaire mais non suffisante pour que  $f$  admette en  $u$  un extremum local.
- Quand  $\frac{\partial f}{\partial x}(u) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = 0$ , on peut avoir les cas suivants :



### Exemples 12

Déterminer les extrema locaux éventuels des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 7y + 7$
2.  $f(x, y) = xy \ln(1 + x)$ .
3.  $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^3$ .

## 4.2 Équations aux dérivées partielles

### Définition 17 : équation aux dérivées partielles

Soit  $f$  une fonction  $f$  définie sur un ouvert  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^2$  admettant des dérivées partielles d'ordre 1 ou d'ordre 2 suivant le cas en tout point de  $\mathcal{P}$ .

Une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 est une équation mettant en jeu une telle fonction et au-moins une des dérivées partielles.

Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 est une équation mettant en jeu une telle fonction et au-moins une des dérivées partielles d'ordre 2 (et éventuellement ses dérivées partielles d'ordre 1).

**Remarques**

- Les équations différentielles aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines des sciences (équations de propagation des ondes, équations de la diffusion thermique, équations de transport, ...)
- Il n'y a pas de démarche particulière à connaître pour résoudre de telles équations, les changements de variables (polaires, affines) éventuels seront indiqués.

**Exemples 13**

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

2. Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant le changement de variables  $u = 2x + y, v = 3x + y$ .

3. Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

en utilisant le changement de variables  $u = x + y, v = x - y$ .

4. Résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant les coordonnées polaires.

5. Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

### 4.3 Applications à la géométrie

#### Définition 18 : lignes de niveau

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

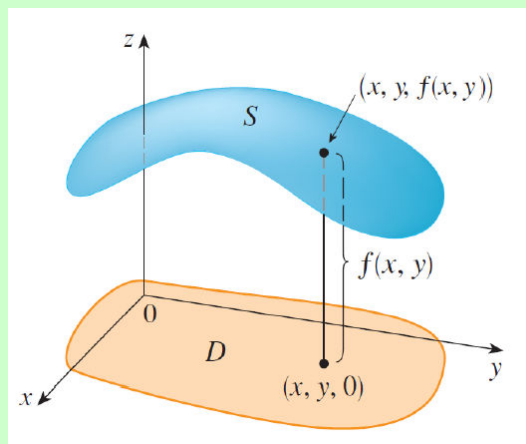
On appelle ligne de niveau de  $f$  correspondant à la valeur  $k$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $f(x, y) = k$ .

#### Propriété 7 : ligne de niveau

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

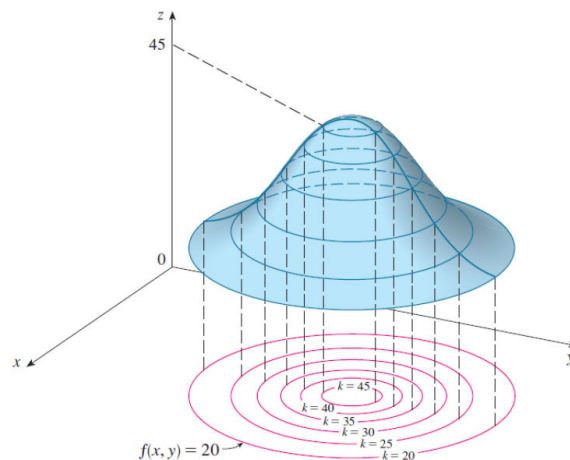
Si une ligne de niveau n'est pas vide, elle représente une courbe plane dans l'espace.

L'ensemble des points de coordonnées  $(x, y, f(x, y))$  est la surface dont une équation est  $z = f(x, y)$ .



#### Remarque

La ligne de niveau est la projection sur le plan  $(O, x, y)$  de l'intersection de la surface représentative de  $f$  avec le plan d'équation  $z = k$ .



**Exemples 14**

Dans chaque cas, déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes. Esquisser ensuite leurs graphes

1.  $f(x, y) = x + 2y - 4$
2.  $f(x, y) = e^{y-x^2}$
3.  $f(x, y) = 2y + \cos^2 x$ .

**Définition 19 : point régulier d'une courbe**

Soit  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe d'équation  $f(x, y) = \lambda$ .

Un point  $M_0(x_0, y_0)$  est dit régulier si les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  ne sont pas toutes les deux nulles.

Autrement dit :  $M_0$  régulier  $\iff \overrightarrow{\text{Grad}} f_{M_0} \neq \vec{0}$ .

**Propriété 8 : paramétrage**

Au voisinage d'un point régulier, il existe un paramétrage de la courbe  $\mathcal{C}_\lambda$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ .

**Propriété 9 : point régulier et normale**

En un point régulier  $M_0$  d'une ligne de niveau d'équation  $f(x, y) = \lambda$ , le vecteur  $\overrightarrow{\text{Grad}} f_{M_0}$  est un vecteur directeur de la normale.

**Exemples 15**

1. Soit la courbe d'équation  $x^y = y^x$ .  
Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point (2,4).
2. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $x^3 + y^3 = 3xy$ .  
Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point  $(x_0, y_0)$ .

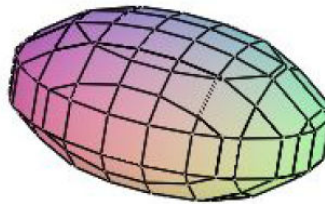
**Définition 20 : surface**

Soit  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

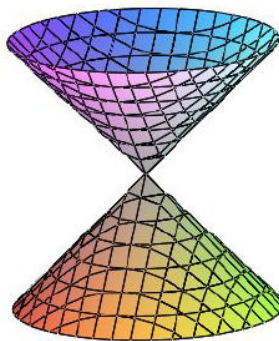
On appelle surface d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f(x, y, z) = 0$ .

**Exemples**

- La sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  est définie par l'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
- L'ellipsoïde a pour équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



- Le cône a pour équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

**Définition 21 : point régulier et surface**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\Sigma$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$ .

Un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  de  $\Sigma$  est dit régulier si  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ .

**Définition 22 : plan tangent et normale à une surface**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma$  la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  et  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point régulier de  $\Sigma$ .

1. Le plan tangent à  $\Sigma$  au point  $M_0$  est le plan passant par  $M_0$  et normal au vecteur  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ .
2. La normale à  $\Sigma$  au point  $M_0$  est la droite passant par  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ .

**Exemples 16**

1. Déterminer les plans tangents à la surface  $\Sigma$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  et orthogonal à la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$ .
2. Déterminer les points de la surface  $\Sigma$  d'équation cartésienne  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$  en lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation  $2x + y - z = 0$ .
3. Déterminer les équations des plans tangents à la surface  $\Sigma$  d'équation cartésienne  $xy = z^3$  contenant la droite  $D$  d'équations  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$ .
4. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 + y^2)}$  et soit  $\Sigma$  la surface d'équation cartésienne  $z = f(x, y)$ .  
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à  $\Sigma$  au point  $A(1, 1, e^{-2})$ .

**Exemple 17**

Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation  $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$ .

1. Déterminer les plans tangents parallèles au plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Étudier localement la position relative de la surface  $\mathcal{S}$  et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenus.