Chapitre 13 : Fonctions de plusieurs variables

Exemples 1

Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Correction des exemples 1

1. $f(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   Le "degré" du numérateur étant strictement supérieur à celui du dénominateur, on passe en coordonnées polaires :
   En posant $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right. \quad r>0, \theta\in\mathbb{R}$
   On a $f(x,y) = \dfrac{r^2\left(3\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta\right)}{r} = r\left(3\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta\right)$.
   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r\left(3\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta\right) = 0$ puisque $3\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, f admet une limite en (0,0) égale à 0.
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}$, on a $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$ donc $\left|f(x,y)\right| \leq \left|x+y\right|$ avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|x+y\right| = 0$.
   Ainsi, f admet une limite en (0,0) égale à 0.
3. Le "degré" du numérateur étant égal à celui du dénominateur, on cherche deux chemins différents avec deux limites différentes.
   — Pour $x=y$, on a $f(x,y)=0$ et donc si la limite de f en (0,0) existe, elle est égale à 0.
   — Pour $x=2y$, on a $f(x,y) = \dfrac{3y^2}{5y^2}$ et donc si la limite de f en (0,0) existe, elle est égale à $\dfrac{3}{5}$.
   Ainsi, par unicité de la limite, f n'admet pas de limite en (0,0).

4. Le "degré" du numérateur étant stictement inférieur à celui du dénominateur, on cherche un chemin avec une limite non finie.
   Pour $y=0$ et $x>0$, on a $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
   Ainsi, f n'admet pas de limite finie en (0,0).

Exemples 2

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$.

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ e^y \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$.

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$.

Correction des exemples 2

1. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, la fonction f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
   On étudie la continuité en (0,0) :
   En passant en coordonnées polaires (cf exemple 1), on a : $f(x,y) = r\cos\theta\sin\theta$ donc avec un raisonnement analogue à celui de l'exemple 1, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et donc f est continue en (0,0).
   Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour (x,y) tel que $x \neq y$, la fonction f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
   On étudie la continuité en (x,y) avec $x = y$.
   On a $\lim\limits_{(x,y)\to(x,x)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to y} \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$: on reconnait la définition du nombre dérivé de la fonction exp en y : on a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(x,x)} f(x,y) = e^y = f(y,y)$ et donc f est continue en (y,y).
   Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, la fonction f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
   On étudie la continuité en (0,0) :
   En posant $x = y$, on a $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc avec ce chemin, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \neq f(0,0)$ et donc f n'est pas continue en (0,0).
   Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exemples 3

1. Soit f : $\begin{array}{ccc} [0;1]\times[0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x(1-y) \text{ si} x \leq y \\ y(1-x) \text{ si } y < x \end{cases} \end{array}$.
   Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $[0;1]\times[0;1]$ et les déterminer.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.
   On désigne par (C) le cercle unité. Établir que la fonction f admet un minimum et maximum sur (C). Les déterminer.

Correction des exemples 3

1. Pour $x < y$ et $x > y$, la fonction f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
   On étudie la continuité en (x,y) avec $x = y$.
   La fonction f est continue à gauche en (x,x) d'après les théorèmes usuels. De plus, on a $\lim\limits_{y\to x^+} f(x,y) = \lim\limits_{y\to x^+} y(1-x) = x(1-x) = f(x,x)$. Donc la fonction f est également continue à droite en (x,x).
   Ainsi, la fonction f est continue sur le fermé-borné $[0,1]^2$, elle est donc bornée et atteint ses bornes.
   Fixons $y_0 \in [0,1]$. Pour $x \leq y_0$, on a $f\left(x,y_0\right) = x\left(1-y_0\right)$ qui est une fonction croissante. Pour $x > y_0$, on a $f\left(x,y_0\right) = y_0\,(1-x)$ qui est une fonction décroissante.
   Ainsi, pour y_0 fixé, la fonction qui à x associe $f\left(x,y_0\right)$ admet un maximum égal à $f\left(y_0,y_0\right) = y_0 - y_0^2$, atteint pour $x = y_0$ et un minimum égal à 0, atteint pour $x = 0$ et $x = 1$.
   On montre facilement que la fonction qui à y_0 associe $y_0 - y_0^2$ admet un minimum égal à 0 atteint pour $y_0 = 0$ et $y_0 = 1$, et un maximum égal à $\frac{1}{4}$ atteint pour $y_0 = \frac{1}{2}$.
   Finalement, la fonction f admet un minimum égal à 0 atteint en tout point du bord de carré ($x = 0$ ou $x = 1$ ou $y = 0$ ou $y = 1$), et un maximum égal à $\frac{1}{4}$ atteint pour $x = y = \frac{1}{2}$.
2. La fonction f est clairement continue (d'après les théorèmes usuels) sur le cercle unité qui est un fermé-borné donc f est bornée et atteint ses bornes sur ce cercle.
   $\forall(x,y)\in(C)$, on a $x^2+y^2 = 1$ donc $y^2 = 1-x^2$ et donc
   $f(x,y) = x^3 - 3x\left(2-x^2\right) = 4x^3 - 6x = h(x)$
   Cette fonction est dérivable sur $[-1,1]$ et sa dérivée est égale à $12x^2-6$.
   Cette dérivée est positive sur $\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ et négative sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Le tableau de variations de h montre que cette fonction atteint son maximum pour $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, égal à $2\sqrt{2}$, et son minimum pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, égal à $-2\sqrt{2}$.
   Finalement, f atteint un maximum égal à $2\sqrt{2}$, atteint pour $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et un minimum égal à $-2\sqrt{2}$, atteint pour $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exemples 4
Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Correction des exemples 4

1. On calcule les dérivées partielles de f par rapport à x et y et on a
$\mathrm{d}f = \left(\dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{2y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$
2. De même, on a $\mathrm{d}f = \left(\dfrac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\mathrm{d}x - \left(\dfrac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\mathrm{d}y.$

Exemples 5
Donner une approximation de la variation de volume d'un cylindre droit de rayon $r = 10$ cm et de hauteur $h = 50$ cm quand r augmente de 1 cm et h diminue de 2 cm. (on fera le calcul exact de la variation et ensuite une approximation à l'aide de la différentielle).

Correction de l'exemple 5
Pour un cylindre droit, on a $V(r,h) = \pi r^2 h$.
Cette fonction est clairement différentiable, et on a $dV = \pi\left(2rh\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}h\right)$. Ainsi, avec $r = 10$, $h = 50$, $\mathrm{d}r = 1$ et $\mathrm{d}h = -2$, on trouve $\mathrm{d}v = \pi\left(2 \times 10 \times 50 \times 1 + 10^2 \times (-2)\right)$ soit $\mathrm{d}V = 800\pi$.
Ainsi, une valeur approchée de l'augmentation du volume est de 800π cm^3.
La valeur exacte de l'augmentation de ce volume est égale à
$\pi \times 11^2 \times 48 - \pi \times 10^2 \times 50 = 808\pi$ cm^3.

Exemples 6
Calculer le gradient au point (a,b) ou au point (a,b,c) des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = 3x^2y + 7xy^2$.
2. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Correction des exemples 6
On calcule les différentes dérivées partielles de f et on a :

1. $\nabla f_u = \begin{pmatrix} 6ab + 7b^2 \\ 3a^2 + 14ab \end{pmatrix}$
2. $\nabla f_u = \dfrac{-1}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemples 7

1. Déterminer, si possible, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le gradient est égal à $y^2\overrightarrow{i}+(2xy-1)\overrightarrow{j}$.
2. Déterminer,si possible, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le gradient est égal à $y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}$.

Correction des exemples 7

1. D'après l'énoncé, on doit avoir $\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 2xy-1\end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y) & = & xy^2+h(y)\\ f(x,y) & = & xy^2-y+k(x)\end{array}\right.$ où h et k sont des fonctions de classe C^1.

   On a donc $h(y)=-y$ et la fonction k ne peut pas dépendre de x donc c'est une fonction constante.

   Ainsi, $f(x,y)=xy^2-y+k (k\in\mathbb{R})$.
2. De même, $\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y) & = & xy+h(y)\\ f(x,y) & = & -xy+k(x)\end{array}\right.$.

   Donc il n'existe pas de fonction dont le gradient satisfait aux conditions proposées.

Exemples 8

1. Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? :

   a. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$

   b. $f(x,y)=\sin(2x-3y)$

   c. $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+3xy}$

   d. $f(x,y,z)=\sin(x^2-y^2+z^2)$.
2. Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} xy\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}$.

   Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} x^2y^2\sin\dfrac{1}{x} \text{ si} x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}$.

   Monter que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en certains points.

Correction des exemples 8

1. **a.** La fonction f n'est pas définie en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

   b. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$, et continue sur $\mathbb{R}^2$ d'après les théorèmes usuels.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x-3y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3\cos(2x-3y)$. Les dérivées partielles de f par rapport à x et y existent en tout point, et sont continues d'après les théorèmes usuels.
   Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

   c. Le raisonnement est analogue : la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x+3y)e^{x^2+3xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3xe^{x^2+3xy}$ existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.
   Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

   d. Même raisonnement avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2-y^2+z^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\cos(x^2-y^2+z^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z\cos(x^2-y^2+z^2)$

2. **Continuité** :
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
   Pour la continuité en $(0,0)$, on passe en coordonnées polaires et on a
   $f(x,y) = r^3\left(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta\right)$ qui tend vers 0 lorsque r tend vers $0=f(0,0)$.
   (Pour les détails du raisonnement, voir l'exemple 1).
   Donc f est également continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

   Existence des dérivées partielles :
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x^4y+3x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^5-3x^3y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ et les dérivées partielles existent.
   On étudie $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ puisque $f(h,0) = f(0,0) = 0$. Ainsi, la dérivée partielle de f par rapport à x existe en $(0,0)$ et est égale à 0.
   De même, on étudie $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$ puisque $f(0,h) = f(0,0) = 0$. Ainsi, la dérivée partielle de f par rapport à y existe en $(0,0)$ et est égale à 0.

   Continuité des dérivées partielles :
   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles calculées précédemment sont clairement continues.
   En $(0,0)$, on passe en coordonnées polaires et on a
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = r^2\left(2\cos^4\theta\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta\right)$ dont la limite est égale à 0 quand r tend vers 0. On a donc bien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue également en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.
   On montre de façon strictement analogue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue également en (0,0) donc sur $\mathbb{R}^2$.
   Finalement, f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. **Continuité** :
Pour $x \neq 0$, la fonction f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
$\forall x \neq 0, \left|f(x,y)\right| \leq x^2y^2$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$: f est également continue en $(0,y)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Existence des dérivées partielles : Pour $x \neq 0$, on a
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - y^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Donc les dérivées partielles existent pour $x \neq 0$.
Pour les dérivées partielles en $(0,y)$, on étudie :
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = 0$.
Ainsi, les dérivées partielles de f par rapport à x et par rapport à y existent et
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Donc les dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^2$, et f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $\left(0,y_0\right)$ avec $y_0 \neq 0$: Tout d'abord on a
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} 2xy^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement sur $\mathbb{N}^*$ par
$a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $b_n = a_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$.
Il est immédiat que ces deux suites convergent vers 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$y_0^2\cos\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = y_0^2$ et $y_0^2\cos\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = -y_0^2$: donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,y_0)$.

Exemples 9

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\cos y$ où x et y sont deux fonctions de t définies par $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3$.
Calculer $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x\cos y + y\ln(z^2+1)$ où x, y et z sont trois fonctions de t définies par $x(t) = t^2+3t$, $y(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ et $z(t) = \mathrm{e}^t$.
Calculer $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Correction des exemples 9

1. On a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(t^2,t^3\right) \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(t^2,t^3\right) \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t\cos\left(t^3\right) - t^2\sin\left(t^3\right) \times 3t^2 =$
$2t\cos\left(t^3\right) - t^4\sin\left(t^3\right)$
2. De même :
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} =$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(t^2+3t, \dfrac{1}{t^2+1}, \mathrm{e}^t\right) \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(t^2+3t, \dfrac{1}{t^2+1}, \mathrm{e}^t\right) \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(t^2+3t, \dfrac{1}{t^2+1}, \mathrm{e}^t\right) \times \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
$= \cos\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right) \times (2t+3) + \left[-\left(t^2+3t\right)\sin\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^2+1\right)\right] \times \dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^2} + \dfrac{1}{t^2+1} \times$
$\dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1} \times \mathrm{e}^t$

Exemples 10

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(u,v) = f(u^2+v^2, 2uv).$$
   a. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.
   b. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   a. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.
   b. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de f.
   c. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Correction des exemples 10

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(u,v) = f(u^2+v^2, 2uv).$$
   a. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et les fonctions $x : (u,v) \mapsto u^2+v^2$ et $y : (u,v) \mapsto 2uv$ sont clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
   b. $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v) \times \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u,v) \times \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u\dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v) + 2v\dfrac{\partial f}{\partial y}(u,v)$.
   De même, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2v\dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v) + +2u\dfrac{\partial f}{\partial y}(u,v)$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
   a. On montre comme dans la question précédente que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   b. De façon analogue à la question précédente :
   $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) \times \dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta) \times \dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta)$.
   $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) \times \dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta) \times \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta)$.
   c. On résout le système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta) & = & \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r,\theta) & = & \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{array}\right.$$
   En multipliant la première équation par $r\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$, on trouve :
   $r\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = r\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ soit, pour $r \neq 0$:
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$
   De même, on trouve, pour $r \neq 0$:
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$

Exemples 11

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
   a. $f(x, y) = x^2(x + y)$
   b. $f(x, y) = \cos(xy)$

2. Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ si}(x, y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$
   a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
   b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent.
   Que peut-on en déduire ?

Correction des exemples 11

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
   a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2xy\right) = 6x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy\right) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = 0$$

   b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x\sin(xy)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\sin(xy)\right) = -y^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\sin(xy)\right) = -xy\cos(xy) - \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin(xy)\right) = -xy\cos(xy) - \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\sin(xy)\right) = -x^2\cos(xy)$$

2. a. Continuité :

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est continue en (x,y) d'après les théorèmes usuels.
Pour la continuité en $(0,0)$, on passe en coordonnées polaires et on a $f(x,y) = r^2\left(\cos\theta\sin^3\theta\right)$ qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0=$f(0,0)$. (Pour les détails du raisonnement, voir l'exemple 1).
Donc f est également continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Existence des dérivées partielles :
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^5 - y^3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et les dérivées partielles existent.
On étudie $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ puisque $f(h,0) = f(0,0) = 0$. Ainsi, la dérivée partielle de f par rapport à x existe en $(0,0)$ et est égale à 0.
De même, on étudie $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$ puisque $f(0,h) = f(0,0) = 0$. Ainsi, la dérivée partielle de f par rapport à y existe en $(0,0)$ et est égale à 0.

Continuité des dérivées partielles :
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, les dérivées partielles calculées précédemment sont clairement continues.
En $(0,0)$, on passe en coordonnées polaires et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = r\left(\sin^5\theta - \sin^3\theta\cos^2\theta\right)$ dont la limite est égale à 0 quand r tend vers 0. On a donc bien
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue également en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.
On montre de façon strictement analogue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue également en (0,0) donc sur $\mathbb{R}^2$.
Finalement, f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$:
On étudie $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(h,0)}{h} = 0$ puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe est égal à 0.

Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$:
On étudie $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1$.
Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe est égal à 1.
On a donc le résultat attendu : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et diffèrent.
D'après la contraposée du théorème de Schwarz, la fonction f n'est donc pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

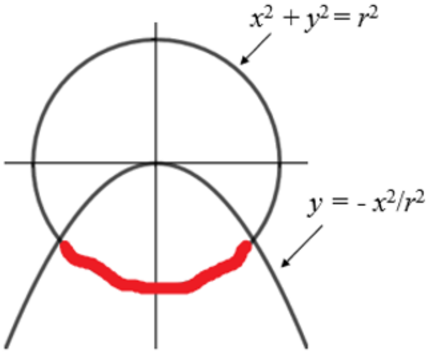
Exemples 12
Déterminer les extrema locaux éventuels des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 7y + 7$
2. $f(x,y) = xy\ln(1+x)$.
3. $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$.

Exemples 12
Déterminer les extrema locaux éventuels des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. On résout le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-2y+2 &= 0 \\ 4y-2x-7 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1/2 \\ y &= 2 \end{cases}$$
Ainsi, si f admet un extremum alors c'est pour $(x,y) = (1/2,2)$.
Soit
$(h,k) \in \mathbb{R}^2 : f(1/2+h, 2+k) = \dfrac{1}{2} + 2\left(h^2+hk+k^2\right) = f(1/2,2) + 2\left[(h+k/2)^2 + 3k^2/4\right]$
On en déduit que : $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, f(1/2+h, 2+k) \geq f(1/2,2)$ donc $f(1/2,2)$ est un minimum (global) de f.
2. f est définie sur $\mathscr{D} =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}$.
On résout le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\ln(x+1) + \dfrac{xy}{x+1} &= 0 \\ x\ln(x+1) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= y \end{cases}$$
Ainsi, si f admet un extremum alors c'est en des points où $x = 0$.
On se place donc en $(0, y_0)$: on remarque que pour tout x au voisinage de 0, on a $x\ln(1+x) \geq 0$ (produit de deux réels de même signe au voisinage de 0).
Donc si $y_0 > 0$, on a $f(x,y) > 0$ au voisinage de $(0,y_0)$ et donc $f(0,y_0)$ est un minimum local.
De même, si $y_0 < 0$, on a $f(x,y) < 0$ au voisinage de $(0,y_0)$ donc $f(0,y_0)$ est un maximum local.
Si $y_0 = 0$ alors $f(x,y)$ change de signe au voisinage de (0,0) et donc (0,0) est un point selle.
3. On résout le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+y) &= 0 \\ 3y^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$
Ainsi, si f admet un extremum alors c'est en (0,0).
Montrons que sur tout cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r > 0$, $f(x,y)$ change de signe, ce qui est suffisant pour montrer que $f(x,y)$ change de signe sur tout voisinage de (0,0).
Sur ce cercle, on a $x^2+y^2 = r^2$ donc $f(x,y) = x^2 + y\left(x^2+y^2\right) = x^2 + yr^2$.
— Si $y > 0$ et $x \neq 1$ alors $f(x,y) > 0$.
— Supposons $y < 0$. alors pour tout couple (x,y) vérifiant simultanément : $\begin{cases} x^2+y^2 &= r^2 \\ y &< -\dfrac{x^2}{r^2} \end{cases}$, on a $f(x,y) < 0$.
Ainsi, f change de signe sur tout voisinage de (0,0) donc c'est un point selle.
Remarque :

L'existence d'un couple satisfaisant aux conditions précédentes peut se prouver algébriquement en étudiant l'inéquation $-\sqrt{1-x^2} < -\dfrac{x^2}{r^2}$, ou plus élégamment en utilisant la représentation graphique suivante, sur laquelle on peut choisir un couple de la partie rouge du cercle :



Exemples 13

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant le changement de variables $u = 2x + y$, $v = 3x + y$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

en utilisant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

4. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant les coordonnées polaires.

5. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Correction des exemples 13

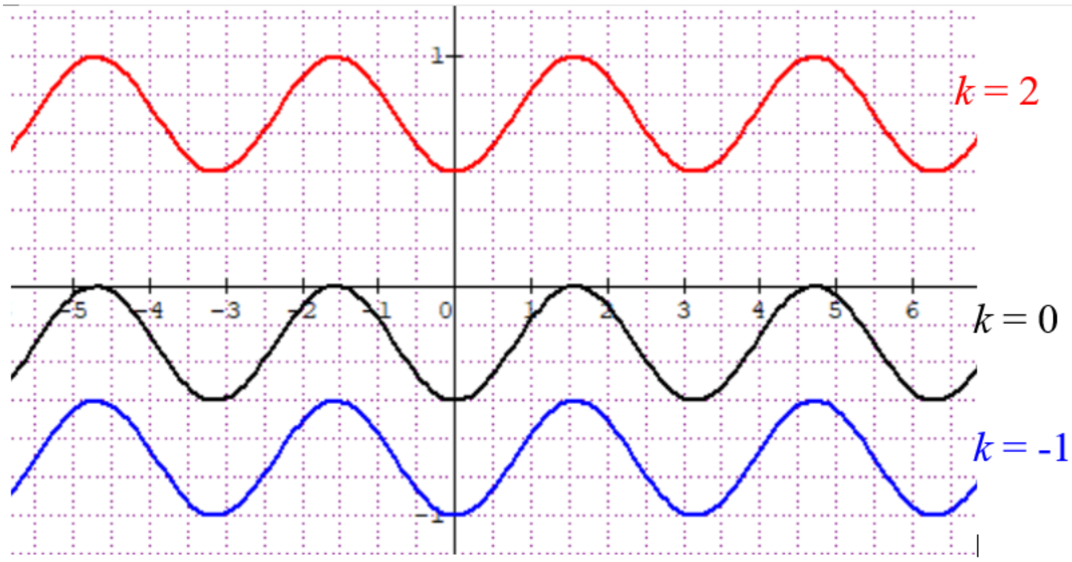
1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0 \Longleftrightarrow \exists h\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=h(y) \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\, f(x,y)=h(y)+xk(y)$.
   L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=h(y)x+k(y)$ où h et k sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Comme le suggère l'énoncé, on pose $f(x,y)=g(u,v)$ avec $u=2x+y$, $v=3x+y$. Par composition, g est de classe C^1 (comme f) sur $\mathbb{R}^2$, et en utilisant les formules de dérivation partielle des fonctions composées, on a :
   $$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\times\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\times\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right.\text{, soit : }\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 2\dfrac{\partial g}{\partial u}+3\dfrac{\partial g}{\partial v}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{array}\right.$$
   On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Longleftrightarrow -\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0 \Longleftrightarrow \exists h\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R})\,;\, g(u,v)=h(v)$.
   L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=h(3x+y)$ où h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. De façon analogue à la question précédente, on obtient facilement l'équation $2\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=f(x,y)=g(u,v)$, soit $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}g(u,v)$.
   On reconnait l'équation caractéristique de la fonction exponentielle!
   L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=h(x-y)\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$ où h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. En utilisant le résultat de l'exemple 10.2.c., on a, pour $x>0$ donc $r\neq 0$:
   $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=r\dfrac{\partial g}{\partial r}=0 \Longleftrightarrow \exists h\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R}); f(x,y)=h(\theta)$
   Comme $x\neq 0$, on a $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ et donc on peut prendre $\theta=\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$.
   L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=h\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}\right)$ où h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. On utilise le changement de variable affine $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$ et $f(x,y)=g(u,v)$.
   Par composition, g est de classe C^2 (comme f) sur $\mathbb{R}^2$, et en utilisant les formules de dérivation partielle des fonctions composées, on a :
   $$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\times\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\times\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\times\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right.\text{, soit : }\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{array}\right.$$
   De même, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$.
   Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz permet d'affirmer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$ et donc l'équation devient : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0$.
   Ainsi, l'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=h\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+k\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ où h et k sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exemples 14
Dans chaque cas, déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes. Esquisser ensuite leurs graphes

1. $f(x, y) = x + 2y - 4$
2. $f(x, y) = e^{y-x^2}$
3. $f(x, y) = 2y + \cos^2 x$.

Correction des exemples 14

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $f(x, y) = k \Longleftrightarrow = x + 2y - 4 - k = 0$, qui est l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est la droite d'équation
$x + 2y - 4 - k = 0$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Il est immédiat que si $k \leq 0$ alors la ligne de niveau k est vide. Supposons donc $k > 0$: on a $f(x, y) = k \Longleftrightarrow e^{y-x^2} = k \Longleftrightarrow y = x^2 + \ln k$, qui est l'équation d'une parabole.
Ainsi, pour tout réel $k > 0$, la ligne de niveau k de f est la parabole d'équation
$y = x^2 + \ln k$.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $f(x, y) = k \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{k}{2}$.
Ainsi, pour tout réel k, la ligne de niveau k de f est la courbe d'équation
$y = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{k}{2}$.



Exemples 15

1. Soit la courbe d'équation $x^y = y^x$.
   Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point (2,4).
2. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$.
   Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au point (x_0, y_0).

Correction des exemples 15

1. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x, y) = x^y - y^x$. La courbe d'équation $x^y = y^x$ est la ligne de niveau 0 de la fonction f, et le point de coordonnées $(2, 4)$ appartient bien à cette courbe puisque $2^4 = 4^2$. On calcule le gradient de f au point (x, y) :
   $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} yx^{-1} - \ln(y)y^x \\ \ln(x)x^y - xy^{-1} \end{pmatrix}$ et donc $\nabla f(2, 4) = \begin{pmatrix} 32(1-\ln 2) \\ 8(2\ln 2 - 1) \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.
   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4(1-\ln 2) \\ 2\ln 2 - 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la tangente à la courbe au point (2,4).
   On en déduit qu'une équation de cette tangente est
   $4(1-\ln 2)x + (2\ln 2 - 1)y + c = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$.
   Or, le point $(2, 4)$ appartient à cette tangente donc on a
   $4(1-\ln 2) + 4(2\ln 2 - 1) + c = 0$, soit $c = -4\ln 2$.
   Ainsi, l'équation cherchée est $4(1-\ln 2)x + (2\ln 2 - 1)y - 4\ln 2 = 0$.
2. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. La courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ est la ligne de niveau 0 de la fonction f. On suppose que le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à cette courbe puisque donc que $x_0^3 + y_0^3 = 3x_0y_0$. On calcule le gradient de f au point (x, y) :
   $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 - y) \\ 3(y^2 - x) \end{pmatrix}$ et donc $\nabla f(x, y) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = x^4 \\ y^2 = x \end{cases} \iff$
   $\begin{cases} x^2(x^2 - 1) = 0 \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$
   Ainsi, pour (x_0, y_0) différent de $(0, 0)$ et $(1, 1)$, le le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} x_0^2 - y_0 \\ y_0^2 - x_0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la tangente à la courbe au point (x_0, y_0).
   On en déduit qu'une équation de cette tangente est
   $(x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y + c = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$.
   Or, le point (x_0, y_0) appartient à cette tangente donc on a
   $(x_0^2 - y_0)x_0 + (y_0^2 - x_0)y_0 + c = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$, soit $x_0^3 + y_0^3 - 2x_0y_0 + c = 0$. Or, on a $x_0^3 + y_0^3 = 3x_0y_0$ donc $c = -x_0y_0$.
   Ainsi, l'équation cherchée est $(x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y - x_0y_0 = 0$.

Exemples 16

1. Déterminer les plans tangents à la surface Σ d'équation cartésienne $x^2+y^2+2z^2=1$ et orthogonal à la droite D d'équation $x=\dfrac{y}{3}=-\dfrac{z}{2}$.
2. Déterminer les points de la surface Σ d'équation cartésienne $x^2-y^2+z^2=1$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation $2x+y-z=0$.
3. Déterminer les équations des plans tangents à la surface Σ d'équation cartésienne $xy=z^3$ contenant la droite D d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3z-3 \end{array}\right.$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ et soit Σ la surface d'équation cartésienne $z=f(x,y)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $A\left(1,1,\mathrm{e}^{-2}\right)$.

Correction des exemples 16

1. La droite D a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -z_0 \\ y & = & -3z_0 \\ z & = & 2z_0 \end{array}\right.$ donc un vecteur directeur de D est le vecteur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
Analyse :
Supposons qu'un point $M(x,y,z)$ cherché existe. $\overrightarrow{u}$ est donc un vecteur orthogonal au plan tangent à la surface en M. Ce vecteur orthogonal est par ailleurs égal à $\triangledown f(x,y,z)$ avec $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1$.
$\triangledown f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\4z\end{pmatrix}$.
$\triangledown f(x,y,z)$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul, soit :
$\left\{\begin{array}{lcl} -4y-12z & = & 0 \\ 4z+4x & = & 0 \\ 6x-2y & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -z \\ y & = & -3z \\ z & = & z \end{array}\right.$
En outre, on a $x^2+y^2+2z^2=1$ soit $12z^2=1$ soit $z=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\lambda$ ou $z=-\lambda$.
Ainsi, si le point M existe alors $M=\begin{pmatrix}-\lambda\\-3\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix}\lambda\\3\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$
Synthèse :
On vérifie facilement que les gradients de f en ces deux points M sont colinéaires à $\overrightarrow{u}$ et que par conséquent ces points conviennent.
2. Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on pose $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-1$: la surface Σ est alors la ligne de niveau 0 de f.
Analyse :
Si un tel plan tangent existe, alors il admet le vecteur $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal, et donc le gradient de la fonction en $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ est colinéaire à ce vecteur.
Or, $\triangledown f\left(x_0,y_0,z_0\right)=\begin{pmatrix}2x_0\\-2y_0\\2z_0\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul, soit $\begin{cases} z_0 - x_0 & = & 0 \\ -x_0 - 2z_0 & = & 0 \\ -2y_0 - x_0 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 & = & -2z_0 \\ -y_0 & = & 2z_0 \\ z_0 & = & z_0 \end{cases}$

En outre, on a $x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 = 1$ soit $z_0^2 = 1$, donc $z_0 = 1$ ou $z_0 = -1$.

Si ces plans existent, alors ils sont tangents à Σ en $M\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Synthèse :
On vérifie facilement que les gradients de f en ces deux points M sont colinéaires à $\overrightarrow{n}$ et que par conséquent ces points conviennent.

3. Pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = xy - z^3$: la surface Σ est alors la ligne de niveau 0 de f.

Analyse :

A condition que ce vecteur ne soit pas nul, $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -3z_0^2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan tangent à Σ en $\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Une équation de ce plan est $y_0 x + x_0 y - 3z_0^2 z + c = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$.

Le point $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ appartient à ce plan donc $2x_0 y_0 - 3z_0^3 + c = 0$, soit, comme $x_0 y_0 = z_0^3$, $c = z_0^3$ et donc le plan tangent a pour équation $y_0 x + x_0 y - 3z_0^2 z + z_0^3 = 0$.

La droite D est incluse dans ce plan tangent si et seulement si, pour tout réel z, on a : $2y_0 + (3z - 3)x_0 - 3z_0^2 z + z_0^3 = 0 \iff \forall z \in \mathbb{R}, \left(3x_0 - 3z_0^2\right) z - 3x_0 + z_0^3 = 0 \iff x_0 = z_0 = 0$ ou $x_0 = z_0 = 1$.

En outre, on doit avoir $f\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ donc soit $y_0 = 0$ (ce qui est impossible puisqu'alors le gradient de f est nul), soit $y_0 = 1$.

Donc si le plan existe, il est tangent en $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et a pour équation $x + y - 3z + 1 = 0$.

Synthèse :
On vérifie facilement que ce point convient.

4. Pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on pose $g(x, y, z) = f(x, y) - z$: la surface Σ est donc la ligne de niveau de g, et le point A appartient bien à cette surface (évident).

Analyse :

Comme ce vecteur est non nul, $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \begin{pmatrix} 2x_0\left(1 - x_0^2\right) e^{-\left(x_0^2 + y_0^2\right)} \\ -2x_0^2 y_0 e^{-\left(x_0^2 + y_0^2\right)} \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan tangent à Σ en $\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Au point A, on a donc $\nabla f\left(1, 1, e^2\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Une équation de ce plan est $-2e^{-2} y - z + c = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$.

Le point $\left(1, 1, e^{-2}\right)$ appartient à ce plan donc $-3e^{-2} + c = 0$, et donc le plan tangent a pour équation $-2e^{-2} y - z + 3e^{-2} = 0$.

Exemple 17
Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Déterminer les plans tangents parallèles au plan $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. Étudier localement la position relative de la surface $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenus.

Correction de l'exemple 17
Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^4 - x^3 + xy - y^2 - z$.
Ainsi, la surface $\mathscr{S}$ est la ligne de niveau 0 de f.

1. Les plans tangents parallèles au plan $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ont une équation du type

   $z = k \quad (k \in \mathbb{R})$ donc, en ces points, le gradient de f est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{k}$.
   $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 - 3x_0^2 + y_0 \\ x_0 - 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ si et seulement si
   $\begin{cases} 4x_0^3 - 3x_0^2 + y_0 & = & 0 \\ x_0 - 2y_0 & = & 0 \end{cases} \iff x_0 = 0, x_0 = 1/2 \text{ ou } x_0 = 1/4.$
   Ainsi, les points cherchés sont les points $M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_1 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/8 \\ 1/256 \end{pmatrix}$, et les plans tangents ont respectivement pour équation $z = 0$, $z = 0$ et $z = 1/256$.
2. **Etude de la position en M_1 :**
   En prenant par exemple $x = y = 0$, on voit facilement que f change de signe sur tout voisinage de M_1 donc le plan tangent traverse la surface en ce point.

   Etude de la position en M_2 :
   On étudie le signe de $f(1/2 + h, 1/4 + k, l) = h^4 + h^3 + hk - k^2 - l$ au voisinage de $(0, 0, 0)$: le même raisonnement que précédemment montre que f change de signe sur tout voisinage de M_2 donc le plan tangent traverse la surface en ce point.

   Etude de la position en M_3 :
   On étudie le signe de $f(1/4 + h, 1/8 + k, 1/256 + l) = h^4 - 3/8h^2 + hk - k^2 + l$ au voisinage de $(0, 0, 0)$: le même raisonnement que précédemment montre que f change de signe sur tout voisinage de M_3 donc le plan tangent traverse la surface en ce point.