Chapitre 12 : Isométries d'un espace euclidien

Dans toute la suite, $(E, \langle .|. \rangle)$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. On désigne par $\|.\|$. la norme associée au produit scalaire de E.
On note n la dimension de E.

1 Isométrie d'un espace euclidien et groupe orthogonal.

Définition 1 : isométrie

Une isométrie de E est une endomorphisme de E qui conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

Remarque :
Les seules valeurs propres **réelles** possibles d'une isométrie orthogonal sont -1 et 1.

Propriété 1 : groupe orthogonal

1. L'identité de E, Id_E, est une isométrie de E.
2. Soient u et v deux isométries de E. Alors
   a. u est bijective et sa réciproque u^{-1} est aussi une isométrie de E.
   b. $u \circ v$ est une isométrie E.

Un isométrie de E est aussi appelée **automorphisme orthogonal**. L'ensemble des isométries (automorphisme orthogonaux) de E est appelé **groupe orthogonal** de E, et on le note $\mathcal{O}(E)$.

Propriété 2 : caractérisation des isométries

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie de E.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$. (une isométrie conserve le produit scalaire)
3. Il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E telle que la famille $(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n))$ est une base orthonormale de E.
4. Pour toute base orthonormale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E , la famille $(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n))$ est une base orthonormale de E.

Propriété 3 : stabilité

Soit u une isométrie de E et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Définition 2 : symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel

Soit F un sous espace vectoriel de E.
On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^{\perp}$.
En particulier, si F est un hyperplan (c'est-à-dire un sous espace vectoriel de dimension $n-1$), on dit que u est une **réflexion par rapport à** F.

Propriété 4 : symétrie orthogonale et isométrie

Soit u une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F.
Alors u est une isométrie de E.

Exemple 1
Soit E un espace vectoriel euclidien. Et soit u un vecteur unitaire de E.
Soit f l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x - 2\langle x|u\rangle u$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f est une réflexion par rapport à $(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$.

2 Matrices orthogonales

Propriété 5 : expression matricielle du produit scalaire

Soient x et y deux vecteurs de E. Soient respectivement X et Y les vecteurs colonnes constitués des coordonnées de x et y dans une **base orthonormale** de E $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. On a alors :

$$\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x|\varepsilon_k\rangle\langle y|\varepsilon_k\rangle = {}^tXY$$

En particulier, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x|\varepsilon_k\rangle^2 = {}^tXX$.

Propriété 6 : écriture matricielle de produits scalaires

Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice dans une **base orthonormale** de E.

Soient x et y deux vecteurs de E. Soient respectivement X et Y les vecteurs colonnes constitués des coordonnées de x et y dans la même **base orthonormale**. On a alors :

1. $\langle u(x)|y\rangle = {}^tX{}^tAY$.
2. $\langle x|u(y)\rangle = {}^tXAY$.
3. $\langle u(x)|u(y)\rangle = {}^tX{}^tAAY$.

Définition 3 : matrice orthogonale

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
A est une **matrice orthogonale** si et seulement si elle vérifie ${}^tAA = I_n$.

Exemple 2
Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Propriété 7 : caractérisation d'une matrice orthogonale

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est une matrice orthogonale.
2. ${}^tA$ est une matrice orthogonale.
3. A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
4. Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
5. Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
6. A est une matrice de passage entre deux bases orthonormales.

Exemple 3
Redémontrer par une autre méthode que les matrices A et B de l'exemple 2 sont orthogonales.

Propriété 8 : groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

1. I_n est une matrice orthogonale.
2. Soient A et B deux matrices orthogonales d'ordre n. Alors
   a. A est inversible et A^{-1} est aussi une matrice orthogonale.
   b. AB est une matrice orthogonale..

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est appelé groupe orthogonal d'ordre n, et on le note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$.

Propriété 9 : matrice orthogonale et isométrie

Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie.
2. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.
3. Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Propriété 10 : déterminant d'une matrice orthogonale

Pour toute matrice A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.
L'ensemble des matrices orthogonales ayant un déterminant positif est noté $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $S\mathcal{O}(n)$.
L'ensemble des matrices orthogonales ayant un déterminant négatif est noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}^-(n)$.

Propriété 11 : déterminant d'une isométrie

Pour toute isométrie u de E, on a $\det(u) = 1$ ou $\det(u) = -1$.

L'ensemble des isométries ayant un déterminant positif est noté $S\mathcal{O}(E)$.
L'ensemble des isométries ayant un déterminant négatif est noté $\mathcal{O}^-(E)$.

Définition 4 : rotation ou isométrie positive

On appelle **rotation** ou **isométrie positive** (resp. négative)de E toute isométrie de E ayant un déterminant positif (resp. négatif).

3 Groupe orthogonal en dimension 2 ou 3

Définition 5 : orientatiuon d'un espace vectoriel

Soit $\mathscr{B}_0$ une base de E. On dit qu'une base $\mathscr{B}$ de E donne à E la même orientation que $\mathscr{B}_0$ si $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}_0}\mathscr{B} > 0$.

Fixer une orientation pour un espace vectoriel revient donc à fixer une base.

Propriété 12 : matrices orthogonales

Soit $A \in \mathscr{O}(2)$. Alors il existe un réel θ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } A \in S\mathscr{O}(2) \qquad \text{ou} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } A \in \mathscr{O}^-(2).$$

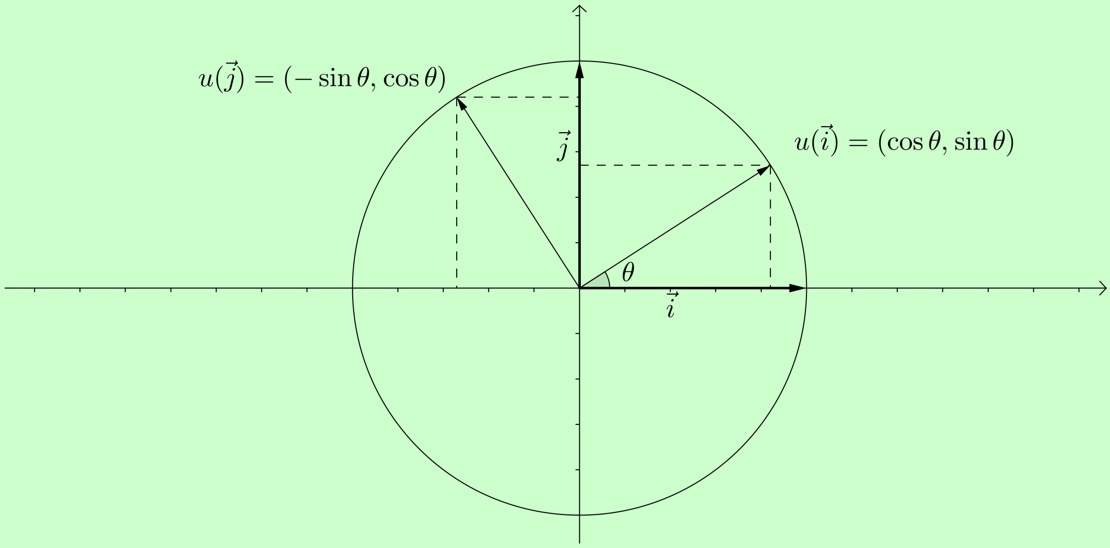
Remarque

A l'aide de cette écriture matricielle, on remarque que le produit de deux matrices de $S\mathscr{O}(2)$ d'angles α et β donne une matrice de $S\mathscr{O}(2)$ d'angle $\alpha + \beta$.
On en déduit notamment que $A \times B = B \times A$ pour A et B matrices de $S\mathscr{O}(2)$.

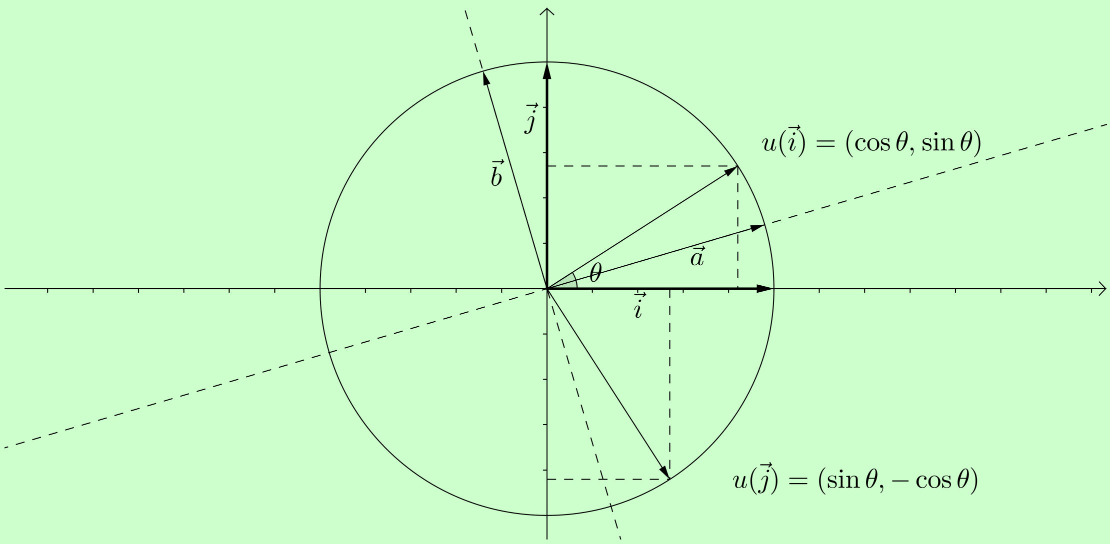
Propriété 13 : structure de $\mathcal{O}(E)$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. Soit u un élément de $\mathcal{O}(E)$.

1. Si $u \in S\mathcal{O}(E)$ alors il existe un réel θ tel que la matrice de u dans toute base orthonormée directe (en orientant E) de E soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   θ est appelé angle de la rotation u.



2. Si $u \in \mathcal{O}^-(E)$ alors il existe une base orthonormée $\{a; b\}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. u est une symétrie orthogonale.



Remarques

1. Une rotation (d'angle différent de 0 et π) n'admet pas de vecteur propre et n'est dons pas diagonalisable, tandis qu'une symétrie orthogonale est diagonalisable (dans une base orthonormale).
2. La composée
   a. de deux rotations est une rotation.
   b. de deux symétries est une rotation.
   c. d'une rotation et d'une symétrie est une symétrie.

Exemple 3

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que A est une matrice orthogonale, puis montrer que c'est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

2. Soit B la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$
Montrer que B est une matrice orthogonale, puis montrer que c'est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

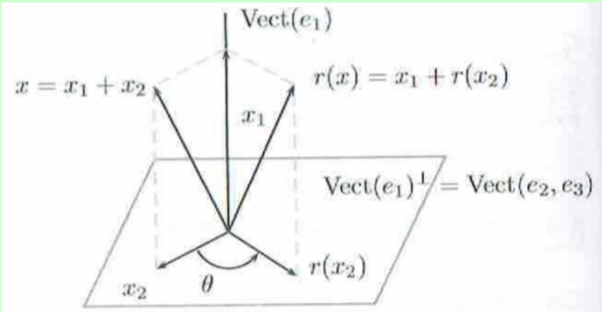
3. Soit C la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que C est une matrice orthogonale, puis montrer que c'est la matrice d'une symétrie orthogonale dont on donnera les éléments caractéristiques.

4. Soit D la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
Montrer que D est une matrice orthogonale, puis montrer que c'est la matrice d'une symétrie orthogonale dont on donnera les éléments caractéristiques.
En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

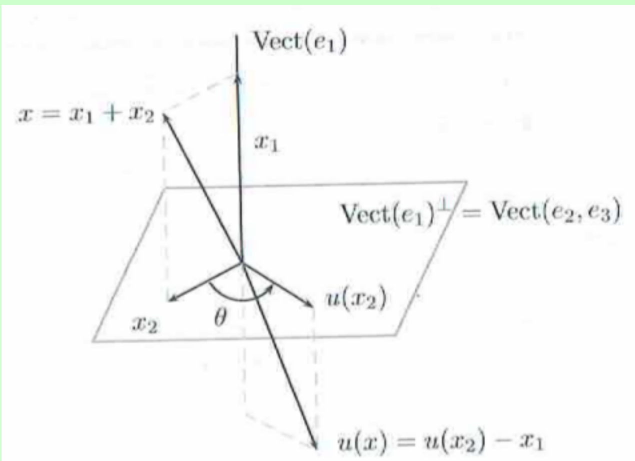
Propriété 14 : structure de $\mathcal{O}(E)$

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit u un élément de $\mathcal{O}(E)$.

1. Si $u \in S\mathcal{O}(E)$ alors il existe un réel θ et une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ de E tels que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
e_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La restriction de u à $(\text{Vect } e_1)^\perp$ est une rotation plane d'angle θ. On dit que $u = r$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par e_1 et d'angle θ.



2. Si $u \in \mathcal{O}^-(E)$ alors il existe un réel θ et une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ de E tels que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
On remarque que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ce produit étant commutatif.
L'isométrie u est donc la composée (commutative) de la rotation d'axe dirigé par e_1 et d'angle θ et le symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect } e_1)^\perp$



Exemple 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est orthogonale et montrer que u est une rotation.

2. Déterminer l'axe de la rotation u. On appellera e_1 un vecteur directeur de cet axe.

3. Déterminer une base orthonormale de $\text{Vect}(e_1)^{\perp}$.

4. On appelle θ l'angle de cette rotation.

- **a.** Justifier que $\text{Tr } A = 1 + 2\cos\theta$ et en déduire la valeur de $\cos\theta$.
- **b.** Justifier que $\sin\theta = \langle u(e_2)|e_3\rangle$ et en déduire la valeur de $\sin\theta$.
- **c.** En déduire $\theta[2\pi]$.

Exemple 5

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est orthogonale et montrer que $u \in \mathscr{O}^-(3)$.

2. Déterminer un vecteur propre e_1 de u associé à la valeur propre -1. *On choisira e_1 avec une première coordonnée positive.*

3. Déterminer une base (e_2, e_3) de $\text{Vect}(e_1)^{\perp}$.

4. Justifier que u est la composée commutative de la rotation d'axe e_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation cartésienne $x + y - z = 0$.

Exemple 6

Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, d'axe dirigé et orienté par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. A l'aide de la méthode d'othonormalisation de Schmitt, compléter le vecteur e_1 en une base orthonormée directe $\mathscr{B}_0(e_1; e_2; e_3)$.

2. Justifier que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$ est orthogonale.

3. En déduire la matrice de r dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 6 : endomrphisme symétrique

oit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle.$$

On dit alors que u est un endomorphisme symétrique de E.
L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est noté $\mathscr{S}(E)$.

Propriété 15 : endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle .|. \rangle)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est un endomorphisme symétrique.
2. La matrice de u dans une base orthonormée quelconque est symétrique.
3. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Remarque

On a donc $\dim \mathscr{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 16 : diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

1. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
   Alors il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.
2. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Alors il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = {}^t PAP$.

Exemples 7

1. Trouver $P \in \mathscr{O}(3)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale avec :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   a. Expliquer, sans faire aucun calcul, pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.
   b. Montrer que f est orthogonal. En déduire le spectre de f.

c. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.

d. Déterminer l'espace propre $E_1(f)$ associé à la valeur propre 1 ainsi qu'une base orthonormée de $E_1(f)$.

e. Montrer que l'espace propre $E_{-1}(f)$ associé à la valeur propre -1 vérifie $E_{-1}(f) = \left(E_1(f)\right)^{\perp}$.

f. En utilisant l'équation caractérisant $E_1(f)$, en déduire un vecteur générateur de $E_{-1}(f)$.

g. Donner une base orthonormée de f dans laquelle la matrice de f est diagonale, et identifier f.