TD Chapitre 12 : Isométries

Exercice 1
Matrice A_1 :
On montre facilement que les colonnes de A_1 constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc A_1 est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$. En outre, $\mathrm{Det}(A_1) = 1$ donc A_1 est la matrice d'une rotation d'angle θ. Son axe u est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : on résout donc le système $A_1 X = X$, associé à la matrice :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & -2 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ -2 & -2(1-\sqrt{3}) & \left(1-\sqrt{3}\right)^2 \\ -2 & \left(1+\sqrt{3}\right)^2 & -2\left(1+\sqrt{3}\right) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ \left(1-\sqrt{3}\right) L_2 \\ \left(1+\sqrt{3}\right) L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 0 & -3\left(1-\sqrt{3}\right) & 3\left(1-\sqrt{3}\right) \\ 0 & 3\left(1+\sqrt{3}\right) & -3\left(1+\sqrt{3}\right) \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ \left(1+\sqrt{3}\right) L_2 \\ \left(1-\sqrt{3}\right) L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z_0 \\ y & = & z_0 \\ z & = & z_0 \end{array}\right.$ $(z_0 \in \mathbb{R})$ et l'axe de la rotation est dirigé par $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $(\mathrm{vect}\ u)^{\perp}$ et le vecteur $w = u \wedge v$ constitue avec v une base orthonormale de $(\mathrm{vect}\ u)^{\perp}$.

On a $w = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait dans la base (u, v, w), la matrice de la rotation est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et donc que $\mathrm{Tr}(A_1) = 1 + 2\cos\theta = 1$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

En outre, on sait que $r(v).w = \sin\theta$ et $r(v).w = A_1 v.w = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -2\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ainsi, l'isométrie en question est une rotation d'axe $(\mathrm{vect}\ u)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Matrice A_2 : De même que pour A_1, on montre que A_2 est la matrice d'une isométrie, de déterminant égal à -1 : c'est donc la composée (commutative) d'une rotation d'angle θ et d'axe dirigé par un vecteur u, et d'une réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\ u)^{\perp}$.
u est un vecteur directeur du sous-espace propre associé à la valeur propre -1, on montre

facilement qu'on a $u=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. On complète u à l'aide d'une base orthonormale (v,w) comme dans l'exemple précédent. On peut par exemple prendre $v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $w=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$.
Tout comme dans l'exemple précédent, on peut affirmer que $\mathrm{Tr}(A_2)=-1+2\cos\theta=1$ donc $\theta=0[2\pi]$.
Ainsi, l'isométrie en question est la composée d'une réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\, u)^{\perp}$ et d'une rotation d'axe $(\mathrm{vect}\, u)$ et d'angle nul : c'est donc une réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\, u)^{\perp}$.

Matrice A_3 :
De même que pour A_1 et A_2, on montre que A_3 est la matrice d'une isométrie, de déterminant égal à -1 : c'est donc la composée (commutative) d'une rotation d'angle θ et d'axe dirigé par un vecteur u, et d'une réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\, u)^{\perp}$.
u est un vecteur directeur du sous-espace propre associé à la valeur propre -1, on montre facilement qu'on a $u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. On complète u à l'aide d'une base orthonormale (v,w) comme dans l'exemple précédent. On peut par exemple prendre $v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $w=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.
Tout comme dans l'exemple précédent, on peut affirmer que $\mathrm{Tr}(A_3)=-1+2\cos\theta=-2$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta=-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
En outre, on sait que $r(v).w=\sin\theta$ et $r(v).w=A_3v.w=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta=-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Ainsi, l'isométrie en question est la composée d'une réflexion par rapport à $(\mathrm{vect}\, u)^{\perp}$ et d'une rotation d'axe $(\mathrm{vect}\, u)$ et d'angle $\theta=-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 2
On va écrire la matrice de la symétrie dans une base adaptée, puis répondre à la question en utilisant les formules de changement de base.
On sait que le vecteur $u=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur de norme 1 qui dirige $(\mathscr{P})^{\perp}$. On complète ce vecteur en une base orthonormée (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$, où bien entendu la famille (v,w) sera une base orthonormée de $(\mathscr{P})$.
On peut prendre $v=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $w=u\wedge v=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$.
Dans la base (u,v,w), la matrice de s s'écrit $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
En appelant P la matrice composée dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u, v et w dans la base canonique, on a, d'après les formules de changement de base :

$D = P^{-1}.A.P$ ou encore $A = P.D.P^{-1}$.
P étant une matrice de passage d'une base orthonormale vers une base orthonormale, on a $P^{-1} = {}^t P$ et finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} \\ 2/\sqrt{14} & -0 & -5/\sqrt{35} \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{35} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{35} & -5/\sqrt{35} & 3/\sqrt{35} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
On procède comme dans l'exercice précédent : on cherche une base orthonormale (u, v, w) telle que u dirige l'axe de la rotation et (v, w) est une base orthonormale de $(\text{vect } u)^{\perp}$. On pose $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $w = u \wedge v = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans cette base, la matrice de la rotation s'écrit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ 0 & \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

En appelant P la matrice composée dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u, v et w dans la base canonique, on a, d'après les formules de changement de base :
$R = P^{-1}.A.P$ ou encore $A = P.R.P^{-1}$.
P étant une matrice de passage d'une base orthonormale vers une base orthonormale, on a $P^{-1} = {}^t P$ et finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 4

On doit montrer que $\forall\left(x, x', y\right) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\lambda x + x'\right) = \lambda f(x) + f\left(x'\right)$.
Compte tenu du contexte de l'exercice, on va montrer que le vecteur $f\left(\lambda x + x'\right) - \lambda f(x) - f\left(x'\right)$ est orthogonal à tout vecteur y de E : il sera donc nul et c'est ce qu'on veut démontrer.
Soit $y \in E$. Par linéarité du produit scalaire, on a :

$\left\langle f\left(\lambda x + x'\right) - \lambda f(x) - f\left(x'\right) | y\right\rangle = \left\langle f\left(\lambda x + x'\right) | y\right\rangle - \lambda\left\langle f(x) | y\right\rangle - \left\langle f\left(x'\right) | y\right\rangle$
D'après l'hypothèse, cette quantité est égale à :
$\left\langle \lambda x + x' | f(y)\right\rangle - \lambda\left\langle x | f(y)\right\rangle - \left\langle x' | f(y)\right\rangle = \left\langle 0 | f(y)\right\rangle$ par linéarité du produit scalaire.
Donc le vecteur $f\left(\lambda x + x'\right) - \lambda f(x) - f\left(x'\right)$ est orthogonal à tout vecteur y de E : il est donc nul et f est bien linéaire.

Exercice 5

1. On cherche à montrer que $\forall (x, y) \in E, \left\langle f(x) | y\right\rangle = \left\langle x | f(y)\right\rangle$.
   Soit $(x, y) \in E^2$:
   $\left\langle f(x) | y\right\rangle = \left\langle \langle a|x\rangle a + \langle b|x\rangle b | y\right\rangle = \langle a|x\rangle . \left\langle a|y\right\rangle + \langle b|x\rangle . \left\langle b|y\right\rangle$ par linéarité du produit scalaire.
   $\left\langle x | f(y)\right\rangle = \left\langle x | \langle a|y\rangle a + \langle b|y\rangle b\right\rangle = \langle x|a\rangle . \left\langle a|y\right\rangle + \langle x|b\rangle . \left\langle b|y\right\rangle$ par linéarité du produit scalaire.
   Par symétrie du produit scalaire, on a donc $\left\langle f(x) | y\right\rangle = \left\langle x | f(y)\right\rangle$ et f est un endomorphisme symétrique de E.
2. La famille (a, b) étant une famille libre de E, $a + b$ et $a - b$ sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires (facile à montrer).
   On calcule $f(a+b) = \langle a|a+b\rangle a + \langle b|a+b\rangle b = (\langle a|a\rangle + \langle a|b\rangle).a + (\langle b|a\rangle + \langle b|b\rangle).b$
   a et b étant unitaires, on a $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$ et donc :
   $f(a+b) = (1 + \langle a|b\rangle)(a+b)$ et donc $a+b$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \langle a|b\rangle$.
   On montre de façon analogue que $a - b$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - \langle a|b\rangle$.
3. Soit $x \in (\text{Vect}\,(a, b))^{\perp}$. Alors $\langle a|x\rangle = \langle x|b\rangle = 0$ et donc $f(x) = 0$.
   Soit x tel que $f(x) = 0$: on a donc une combinaison linéaire de a et b égale au vecteur nul : $\langle a|x\rangle a + \langle b|x\rangle b = 0$. Or, la famille (a, b) est libre donc les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, soit $\langle a|x\rangle = \langle b|x\rangle = 0$ et donc $x \in (\text{Vect}\,(a, b))^{\perp}$ et donc :
   $$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in (\text{Vect}\,(a, b))^{\perp}.$$
4. E étant de dimension finie, on sait que $E = \text{Vect}\,(a, b) \oplus (\text{Vect}\,(a, b))^{\perp}$ et donc dim $(\text{Vect}\,(a, b))^{\perp} = n - 2$, soit, d'après la question précédente : dim Ker $f = n - 2$.
5. 0, $1 + \langle a|b\rangle$ et $1 - \langle a|b\rangle$ sont des valeurs propres (non nécessairement distinctes) de f.
   Montrons que $1 + \langle a|b\rangle \neq 0$ et $1 - \langle a|b\rangle \neq 0$.
   On a $1 + \langle a|b\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle a|b\rangle = -1$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a $|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\| = 1$, avec égalité si et seulement si les vecteurs a et b sont colinéaires, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.
   On a donc $1 + \langle a|b\rangle \neq 0$ et on montre de façon analogue que $1 - \langle a|b\rangle \neq 0$.
   Avec les notations habituelles, on a dim $E_0 = n - 2$, dim $E_{1+\langle a|b\rangle} \geq 1$ et dim $E_{1-\langle a|b\rangle} \geq 1$.
   Comme la somme de ces dimensions est inférieure ou égale à n, on en déduit que f admet seulement ces trois valeurs propres, et en passant que f est diagonalisable...

Exercice 6

1. On cherche à montrer que $\forall (x,y) \in E, \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$.
   Soit $(x,y) \in E^2$:
   $\langle f(x)|y\rangle = \langle x + \alpha\langle x|a\rangle a|y\rangle = \langle x|y\rangle + \alpha \langle x|a\rangle \langle a|y\rangle$
   $\langle x|f(y)\rangle = \langle x|y + \alpha\langle y|a\rangle a\rangle = \langle x|y\rangle + \alpha \langle y|a\rangle \langle x|a\rangle$
   Donc f est un endomorphisme symétrique de E.

2. $a \neq 0$ et $f(a) = a + \alpha\langle a|a\rangle a = (1+\alpha)\, a$ puisque $\langle a|a\rangle = \|a\|^2 = 1$.
   Donc a est un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\alpha$.

3. Soit $x \in E$ $f(x) = x \Longleftrightarrow \alpha\langle x|a\rangle a = 0$.
   Comme $a \neq 0$ et $a \neq 0$, cette condition est équivalente à $\langle x|a\rangle a = 0$, et donc à $x \in (\text{vect } a)^{\perp}$ qui est bien entendu non vide. Donc 1 est une valeur propre de f, le sous-espace propre associé à 1 est $(\text{vect } a)^{\perp}$.

4. **a.** E étant de dimension finie, on a $E = \text{vect } a \oplus (\text{vect } a)^{\perp}$ et donc par définition, on a :
   $\forall x \in E, \exists! (\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (\text{Vect } a)^{\perp} ; x = \lambda a + y$.

   b. $\|x\|^2 = \langle \lambda a + y|\lambda a + y\rangle = \lambda^2 \|a\|^2 + 2\lambda \langle a|y\rangle + \|y\|^2$.
   Comme $\|a\|^2 = 1$ et $\langle a|y\rangle = 0$, on a bien $\|x\|^2 = \lambda^2 + \|y\|^2$.

   $\|f(x)\|^2 = \langle f(\lambda a + y)|f(\lambda a + y)\rangle = \lambda^2 \|f(a)\|^2 + 2\lambda \langle f(a)|f(y)\rangle + \|f(y)\|^2$.
   Or, $f(a) = (1+\alpha)a$ donc $\|f(a)\|^2 = (1+\alpha)^2 \|a\|^2 = (1+\alpha)^2$.
   En outre, $f(a)$ est colinéaire à a et $f(y) = y$ d'après les questions précédentes donc $\langle f(a)|f(y)\rangle = 0$ et $\|f(y)\|^2 = \|y\|^2$.
   Finalement, on a bien $\|f(x)\|^2 = \lambda^2 (1+\alpha)^2 + \|y\|^2$.

   c. f est une isométrie si et seulement si :
   $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \Longleftrightarrow \lambda^2 + \|y\|^2 = \lambda^2 (1+\alpha)^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow (1+\alpha)^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = -1$.
   Le premier cas étant exclus, on a bien le résultat : En déduire que f est une isométrie si et seulement si $\alpha = -2$.
   On a alors, pour tout $x \in E$, $f(x) = x - 2\langle x|a\rangle a$. Montrons que f est une réflexion orthogonale par rapport à $(\text{vect } a)^{\perp}$:
   Pour $x \in E$, on pose $x = x - \langle x|a\rangle\, a + \langle x|a\rangle\, a$:
   On a $x - \langle x|a\rangle\, a \in (\text{vect } a)^{\perp}$ et $\langle x|a\rangle\, a \in \text{vect } a$ donc $x - 2\langle x|a\rangle a$ est bien l'image de x par la réflexion annoncée.

Exercice 7

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S =^t AA$.

1. S est bien évidemment symétrique puisque ${}^t({}^tA.A) =^t A.^t({}^tA) =^t AA$.
   S est donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
   Soit λ une valeur propre de S, associée à un vecteur propre x (donc $x \neq 0$).
   On calcule $\langle S(x)|x\rangle$:
   D'une part, on a $\langle S(x)|x\rangle = \lambda \langle x|x\rangle = \lambda \|x\|^2$.
   D'autre part, en nommant X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base orthonormale de vecteurs propres :
   $\langle S(x)|x\rangle =^t (SX).X =^t ({}^tAAX).X = ({}^tX^tA)(A.X) = \|AX\|^2$.
   On a donc $\|x\|^2 = \lambda \|AX\|^2$ et donc $\lambda > 0$ puisque $x \neq 0$.
   Finalement, S est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont positives.

2. S est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres : dans cette base, on a $\text{Tr } S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
D'autre part, $S = {}^t AA$ donc Tr S est la somme des coefficients diagonaux de ce produit.
En appelant b_{ij} les coefficients de ${}^tA$ et c_{ii} un coefficient diagonal de ${}^tAA$: les propriétés du produit matriciel permettent d'affirmer $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$ et comme $b_{ji} = a_{ij}$, on a $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\text{Tr } S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$.
On a bien $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$.
3. S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale : il existe donc une matrice de passage P telle que $S = P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont strictement positifs par hypothèse.
P étant la matrice de passage d'une base orthonormale vers une base orthonormale, elle est orthogonale et on a donc $P^{-1} = {}^t P$. En notant λ_i^2 les valeurs propres positives de S, on a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^2 = D'^2$.
On a donc $S = {}^t PD'D'P$ et comme D' est diagonale, ${}^tD' = D'$ et donc :
$S = {}^t P {}^t D'D'P = {}^t \left(D'P\right)\left(D'P\right)$. Ainsi, il existe une matrice A telle que $S = {}^t AA$.
En outre, on a Det A =Det $P\times$ Det D' avec Det $P \neq 0$ et Det $D' = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.
Donc Det $A \neq 0$ et A est inversible.

Exercice 8

A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale. On cherche le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \text{Det } (X.I_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ X-4 & X-2 & -1 \\ X-4 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-4)(X-1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique donc A possède deux valeurs propres 1 (de multiplicité 2) et 4 (de multiplicité 1).

Recherche du sous-espace propre E_4 :

On résout le système associé à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\left\{\begin{array}{lll} x & = & z_0 \\ y & = & z_0 \\ z & = & z_0 \end{array}\right.$ $(z_0 \in \mathbb{R})$ et $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur normé de E_4.

Recherche du sous-espace propre E_1 :

On peut raisonner comme précédemment, ou bien utiliser le fait que les deux sous-espaces propres de A sont supplémentaires et orthogonaux : une base orthonormale de E_1 est donc composée de deux vecteurs v et w tous deux orthogonaux à E_4.

On peut prendre $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $w = u \wedge v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Ainsi, en notant $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, on a $PAP^{-1} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + X(ab+ac+bc) - abc$.
2. En appelant C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de M, on a M est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\begin{cases} \|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 = 1 \\ \langle C_1|C_2\rangle = \langle C_1|C_3\rangle = \langle C_2|C_3\rangle = 0 \\ C_1 \wedge C_2 = C_3 \end{cases}$

   Ces conditions sont équivalentes à $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \\ c = c^2 - ab \\ b = b^2 - ac \\ a = a^2 - bc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+ac+bc = 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$

   Ainsi, a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ en posant $k = -abc$.
   On étudie les variations de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + k$. f est bien évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a $f'(x) = x(3x-2)$. Les limites de f aux bornes sont évidentes et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k - \frac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

   On en déduit que f aura trois racines (dont éventuellement une racine double) si et seulement si $k \geq 0$ et $k - \dfrac{4}{27} \leq 0$, soit $k \in \left[0; \dfrac{4}{27}\right]$.
   Réciproquement, supposons que $k \in \left[0; \dfrac{4}{27}\right]$: f admet alors trois racines réelles a, b et c telles que $a+b+C = 1$, $ab+ac+bc = 0$ et $abc = -k$.
   Comme $(a+b+C)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, on a aussi $a^2+b^2+c^2 = 1$ donc $M \in \mathcal{O}_3$..
   On a donc soit $C_1 \wedge C_2 = C_3$ soit $C_1 \wedge C_2 = -C_3$.
   De plus, on a $a^2 = a^3 - abc$, $b^2 = b^3 - abc$ et $c^2 = c^3 - abc$. Au moins l'un de ces trois réels est non nul donc on a soit $a = a^2 - bc$, soit $b = b^2 - ac$, soit $c = c^2 - ab$, et donc le cas $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ est exclus.
   On a donc bien $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et toutes les conditions sont remplies : M est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, M est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in \left[0; \dfrac{4}{27}\right]$.