TD Chapitre 12 : Isométries

Exercice 1
Dans chaque cas, reconnaitre l'application linéaire associée à la matrice A et donner ses éléments caractéristiques :

$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale s par rapport au plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x+2y+3z=0$.

Exercice 3
Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation r d'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 4
Soit $(E,\langle .|.\rangle)$ un espace euclidien et f une application de E dans E telle que :

$$\forall (x,y)\in E^2, \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle.$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 5
Soit $(E,\langle .|.\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n\geq 3$, et $\{a;b\}$ une famille libre de deux vecteurs unitaires de E.
On note f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x\in E, f(x) = \langle a|x\rangle a + \langle b|x\rangle b.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Montrer que $a+b$ et $a-b$ sont deux vecteurs propres de f et préciser les valeurs propres correspondantes.
3. Soit $x\in E$. Montrer que $f(x)=0 \iff x\in (\mathrm{Vect}\,(a,b))^{\perp}$.
4. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}\, f = n-2$.
5. En déduire les valeurs propres de f.

Exercice 6
Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, a un vecteur unitaire de E et α un réel non nul.
On note f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = x + \alpha \langle x|a \rangle a.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Montrer que a est un vecteur propre de f.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de f et préciser le sous-espace propre associé à 1.
4. **a.** Justifier que $\forall x \in E, \exists! \left(\lambda, y\right) \in \mathbb{R} \times (\text{Vect } a)^{\perp}\,; x = \lambda a + y$.
   b. Montrer qu'alors on a $\|x\|^2 = \lambda^2 + \|y\|^2$ et $\|f(x)\|^2 = \lambda^2 (1+\alpha)^2 + \|y\|^2$.
   c. En déduire que f est une isométrie si et seulement si $\alpha = -2$. Préciser dans ce cas la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 7
Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^t AA$.

1. Montrer que S est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$.
3. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t AA$ et justifier que A est inversible.

Exercice 8
Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9
Soit a, b, c trois réels et M la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Développer le polynôme $(X-a)(X-b)(X-c)$.
2. Montrer que M est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in \left[0; \dfrac{4}{27}\right]$.