

Problème 1

Problème 1, partie I : Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Q1. On calcule $A^T A$:

$$A^T A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi

$A \in O_3(\mathbb{R}).$

Q2. On calcule le déterminant de la matrice A :

$$\det(A) = \det \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$\det(A) = \frac{1}{8} \left(-\sqrt{2}(-\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \right) = \frac{1}{8}(4 + 4) = 1.$$

On en conclut que

L'isométrie associée à la matrice A est directe.

Q3. On cherche dans cette question à expliciter $\ker(A - I_3)$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) &\iff (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y + z) = x \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{2}z) = y \\ \frac{1}{2}(x + \sqrt{2}y + z) = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - \sqrt{2}y - z = 0 \\ x + \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) &\iff \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ -2\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect}(\vec{u}) \text{ avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Il est plus habituel lorsque l'on travaille avec des isométries de prendre un vecteur $\vec{u}$ normé, ce que l'on pourrait très bien faire ici (sans que cela ne soit néanmoins une obligation).

Q4. On a :

$$A\vec{j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la quantité $\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u})$:

$$\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

Q5. On a vu en question 2 que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A est une isométrie directe. D'après le cours, on en déduit qu'il s'agit d'une rotation vectorielle. La question 3 permet de déterminer les vecteurs invariants de la rotation, et montre qu'il s'agit d'une rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{u})$. Il reste à en déterminer l'angle θ .

D'abord, on sait que $\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta) = 1$ donc $\cos(\theta) = 0$. Ensuite, le cours nous dit que $\sin(\theta)$ est du même signe que $\det(\vec{u}, \vec{v}, A\vec{v}) = \det(\vec{v}, A\vec{v}, \vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$ (les deux déterminants sont égaux car on échange deux fois un vecteur). En prenant $\vec{v} = \vec{j}$, il vient de la question précédente que $\sin(\theta) > 0$. Finalement, on trouve $\theta = \pi/2$.

En conclusion

$$\text{L'isométrie associée à } A \text{ est une rotation vectorielle autour de } \vec{u} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Si on avait choisi un vecteur $\vec{u}$ de sens opposé à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on aurait trouvé un angle opposé, à savoir $\theta = -\pi/2$.

Problème 1, partie II : espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

Q6. On a

$$\begin{aligned} E = S_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$E \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).$

Par définition du sous-espace vectoriel engendré, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E , montrons alors qu'elle est libre. Pour cela, considérons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ainsi la famille est libre.

En conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E et donc $\dim(E) = 3$.

Q7. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ et $M'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}$ trois matrices quelconques de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Symétrie : $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc' = a'a + 2b'b + c'c = \varphi(M', M)$, donc φ est symétrique.
- Bilinéarité : on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + M', M'') &= \varphi \left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix} \right) \\ &= (\lambda a + a')a'' + 2(\lambda b + b')b'' + (\lambda c + c')c'' \\ &= \lambda(aa'' + 2bb'' + cc'') + a'a'' + 2b'b'' + c'c'' \\ &= \lambda\varphi(M, M'') + \varphi(M', M''), \end{aligned}$$

donc φ est linéaire par rapport à la première variable. Comme φ est symétrique, on en déduit qu'elle est également linéaire par rapport à la deuxième variable. Ainsi φ est bilinéaire.

- Positivité : $\varphi(M, M) = a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 0$, donc φ est positive.
- Caractère défini : on suppose que $\varphi(M, M) = 0$. Donc $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$ d'où $a = b = c = 0$ car on a une somme de carrés nulle. On en déduit que φ est définie.

En conclusion

φ est un produit scalaire sur E .

Remarque. En identifiant $M_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$, on aurait pu remarquer que φ n'est rien d'autre que le produit scalaire euclidien canonique.

Q8. On note N la norme associée à φ , c'est-à-dire $N(M) = \sqrt{\varphi(M, M)}$ pour $M \in E$. Tout d'abord, les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent bien à E , et on a

$$N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2} = 1 \quad N\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(2 \times 1^2)} = 1 \quad N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2} = 1.$$

En outre,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 0 + 2 \times 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 = 0.$$

De même,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Finalement

$\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour φ .

Problème 1, partie III : Application linéaire sur E

Q9. Pour $M \in E$, on a $f(M) \in E$, donc f est une application de E dans E . Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + M') &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} - (\lambda b + b') & \frac{\lambda a + a' - \lambda c - c'}{2} \\ \frac{\lambda a + a' - \lambda c - c'}{2} & \frac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} + (\lambda b + b') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \frac{a + c}{2} - b & \frac{a - c}{2} \\ \frac{a - c}{2} & \frac{a + c}{2} + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a' + c'}{2} - b' & \frac{a' - c'}{2} \\ \frac{a' - c'}{2} & \frac{a' + c'}{2} + b' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(M) + f(M'). \end{aligned}$$

Ainsi

f est un endomorphisme de E .

Q10. On calcule les images par f des trois matrices qui composent la base $\mathcal{B}$:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\text{A}}.$$

Q11. On sait que l'endomorphisme canoniquement associé à A est une rotation vectorielle autour de $\vec{u}$ et d'angle $\pi/2$. Dans la base $(\vec{u}, \vec{j}, A\vec{j})$ de $\mathbb{R}^3$ (qui est une base de $\mathbb{R}^3$ car le déterminant de la famille est non nul), la matrice de cette isométrie est donnée par B . Ainsi, on a effectué un changement de base de la base canonique vers la base $(\vec{u}, \vec{j}, A\vec{j})$ pour se ramener à la forme normale B .

Ici, on part de la base $\mathcal{B}$ et on doit trouver la base $\mathcal{B}'$.

Comme $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on pose $M_1 = 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Comme $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on pose $M_2 = 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $A\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on pose

$$M_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (M_1, M_2, M_3) est bien une base de E car les coordonnées de (M_1, M_2, M_3) dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $(\vec{u}, \vec{j}, A\vec{j})$, et que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. En conclusion

La matrice de f dans la base (M_1, M_2, M_3) est B .

Q12. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$. On a

$$\text{Tr}(f(M)) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a+c = \text{Tr}(M)$$

et

$$\begin{aligned} \det(f(M)) &= \left(\frac{a+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{ac}{2} + \frac{c^2}{4} - b^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{ac}{2} - \frac{c^2}{4} \\ &= ac - b^2 \\ &= \det(M). \end{aligned}$$

Finalement

f conserve la trace et le déterminant.

Problème 2

Problème 2, partie I : étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Q13. On a $u_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \boxed{\pi}$, $u_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{2}$ et

$$u_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Q14. Pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos(t) \in [0, 1]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$u_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$

et on a $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$ pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, il vient que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos^n(t) dt$ et on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \cos^n(t)$ (qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \underbrace{\left[\sin(t) \cos^n(t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \times (-n \cos^{n-1}(t) \sin(t)) dt \\ &= n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^{n-1}(t) dt \\ &= n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-1}(t) dt \\ &= n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}(t) dt - n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt \\ &= nu_{n-1} - nu_{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement

$(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$

Q16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = nu_{n-1}u_n = nu_nu_{n-1} = v_{n-1}$, et donc

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $v_0 = u_1u_0 = 2\pi$.

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance et positivité de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$(n+1)u_{n+1}u_{n+1} \leq (n+1)u_{n+1}u_n \leq (n+1)u_nu_n,$$

soit $(n+1)u_{n+1}^2 \leq v_n \leq (n+1)u_n^2$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2.}$$

Q18. On déduit directement de l'encadrement précédent que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1} \leq \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que

$$\frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1,$$

et finalement

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

Problème 2, partie II : série entière

Q20. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \geq 0$ d'après la question Q19.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge car $\frac{1}{2} \leq 1$.

D'après le critère d'équivalence pour des séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Q21. D'après la question Q14. : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

De plus, $t \mapsto (\cos(t))^n$ est continue et positive sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,

donc si $u_n = 0$, alors $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $(\cos(t))^n = 0$, ce qui est absurde.

Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0, |v_n| = u_n |x|^n > 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0, \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \frac{u_{n+1}}{u_n} |x| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi}} |x|$,

soit $\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{n+1}} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$.

D'après la règle de d'Alembert :

◊ Si $|x| < 1$, la série $\sum |v_n|$ converge, donc la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente et $\mathcal{R} \geq 1$.

◊ Si $|x| > 1$, $|v_n| \xrightarrow{+\infty} +\infty$ donc la suite $(u_n x^n)$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement d'où $\mathcal{R} \leq 1$.

$$\boxed{\text{conclusion : } \mathcal{R} = 1}$$

Q22. Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^k dt \right) x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(\cos(t))^k x^k}_{(x \cos(t))^k} dt.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = x \cos(t) \neq 1$ ($|q| < |\cos(t)|$ car $|x| < 1$), d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (x \cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt, \text{ et par linéarité de l'intégrale :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt}$$

$$\text{Q23. } \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(t)|^n}{|1 - x \cos(t)|} dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1 - x \cos(t)|} dt \text{ car } |\cos(t)| \leq 1.$$

Comme $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1 - x \cos(t)|} dt$ est indépendant de n , la suite $\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

De plus, $|x| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

Par produit avec une suite bornée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt = 0$.

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la relation obtenue à la question Q22., on a donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt}$$

Q24. Soit $\phi : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right) = u$$

Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \mapsto \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}$$

Comme pour $x \in]-1; 1[$, $1-x > 0$ et $1+x > 0$ et $u^2 \geq 0$, on a donc :
 $(1-x) + (1+x)u^2 > 0$ pour $u \in [-1, 1]$ et

f est $\mathcal{C}^0$ sur $[1; 1]$ comme quotient de fonctions continues.

On a également,

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) &= \frac{2}{(1-x) + (1+x) \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right) - x(1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right))} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{1 - x \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{1 - x \cos(t)} \end{aligned}$$

D'après le théorème du changement de variables, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt = \int_{-1}^1 f(u) du$, d'où :

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \int_{-1}^1 \frac{2}{1 - x + (1+x)u^2} du$$

Q25. f étant paire, $\forall x \in]-1; 1[, S(x) = 2 \cdot \int_0^1 \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2} du = \frac{4}{1-x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1+x}{1-x}u^2} du$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, S(x) &= \frac{4}{1-x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot u\right)^2} du = \frac{4}{1-x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot u\right)^2} du \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} u \right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

Problème 3 : optimisation du choix d'une place de parking

Problème 3, partie I : loi de X

Q26. On roule sans interruption jusqu'au numéro s avant de choisir la première place disponible (s inclus) d'où :

$$X(\Omega) = \llbracket s; +\infty \rrbracket$$

Q27. Soit $k \geq s$. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : "la i -ième place est libre."

$[X = k]$ signifie que la k -ième place est la première place libre depuis le numéro s , donc $[X = k] = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

Sachant que les occupations de places sont indépendantes les unes des autres, que la place numéro i est libre avec une probabilité p et donc qu'elle est occupée avec une probabilité $1 - p$, on a :

$$p(X = k) = p(\overline{A_s}) \cdot p(\overline{A_{s+1}}) \dots (\overline{A_{k-1}}) \cdot p(A_k) = \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \dots (1-p)}_{k-1-s+1 \text{ fois}} \cdot p = (1-p)^{k-s} \cdot p$$

$$X(\Omega) = \llbracket s; +\infty \rrbracket \text{ et } \forall k \geq s, p(X = k) = (1-p)^{k-s} \cdot p$$

Q28. $Y = X - s + 1$. Comme $X(\Omega) = \llbracket s; +\infty \rrbracket$,

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; +\infty \rrbracket = \mathbb{N}^*$$

De plus, $\forall k \in Y(\Omega)$, $p(Y = k) = p(X - s + 1 = k) = p(X = k + s - 1) = (1-p)^{k+s-1-s} \cdot p$
Finalement :

$$\forall k \in Y(\Omega), p(Y = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

donc Y suit une loi géométrique de paramètre p .

D'après le cours :

$$E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Q29. Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y + s - 1) = E(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1$.

$$E(X) = \frac{1}{p} + s - 1$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$, d'où $V(X) = 1^2 \cdot V(Y) = V(Y)$, c'est à dire :

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Problème 3, partie II : Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

Q30. $p = \frac{1}{10}$ et on suppose que D_s existe.

D'après le théorème de transfert : $D_s = E(|X - d|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - d| p(X = x_n) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n - d| p(X = n)$

car $X(\Omega) = \llbracket s; +\infty \rrbracket$ et pour $n \geq s$, $x_n = n$.

$$\text{Or } |n - d| = \begin{cases} n - d & \text{si } n > d \\ d - n & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

$$\text{D'où } D_s = \sum_{n=s}^d (d - n) p(X = n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d) p(X = n) = S_1 + S_2.$$

$$D_s = S_1 + S_2$$

$$\text{Q31. } \forall k \geq 0, u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = \underbrace{k+1}_{i=0} + \sum_{i=1}^{k+1} (k-(i-1)) \left(\frac{9}{10}\right)^i$$

On effectue le changement d'indice $j = i - 1$:

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, u_{k+1} &= k+1 + \sum_{j=0}^k (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k+1 + \sum_{j=0}^k (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^j \cdot \left(\frac{9}{10}\right) \\ &= k+1 + \left(\frac{9}{10}\right) \sum_{j=0}^k (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^j, \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\forall k \geq 0, u_{k+1} = k+1 + \frac{9}{10} \cdot u_k$$

$$\text{Q32. Soit } \mathcal{P}_k : "u_k = 10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k."$$

initialisation : Soit $k = 0$.

$$u_0 = \sum_{i=0}^0 (0-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = 0 \times 1 = 0$$

$$10 \times 0 - 90 + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0 = -90 + 90 = 0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

D'après la question Q31.,

$$u_{k+1} = k+1 + \frac{9}{10} \cdot u_k = k+1 + \frac{9}{10} \cdot \left(10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k\right) \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{k+1} &= k+1 + 9k - \frac{9}{10} \cdot 90 + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10k+1 - 81 + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} \\ &= 10(k+1) - 10 + 1 - 81 + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10(k+1) - 90 + 90 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

conclusion : On a montré par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
 \text{Q33. } S_1 &= \sum_{n=s}^d (d-n) p(X=n) = \sum_{n=s}^d (d-n) (1-p)^{n-s} \cdot p \stackrel{i=n-s}{=} \sum_{i=0}^{d-s} (d-i-s) (1-p)^i \cdot p \\
 &= p \cdot \sum_{i=0}^{d-s} (d-s-i) (1-p)^i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=0}^{d-s} (d-s-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i \text{ car } p = \frac{1}{10}. \text{ Finalement :}
 \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{10} u_{d-s}$$

D'après la question Q32., $S_1 = \frac{1}{10} \left(10(d-s) - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} \right)$, soit encore :

$$S_1 = d - s - 9 + 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Q34. } S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) p(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n) p(X=n) \\
 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) p(X=n) + \sum_{n=s}^d (n-d) p(X=n) = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) p(X=n) = E(X-d)
 \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert.

$$S_2 - S_1 = E(X-d)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par linéarité de l'espérance, } E(X-d) &= E(X) - d = \frac{1}{p} + s - 1 - d \\
 &= 10 + s - 1 - d = 9 + s - d \text{ car } p = \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } S_2 = S_1 + 9 + s - d = d - s - 9 + 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} + 9 + s - d = 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}.$$

$$S_2 = 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$$

$$\text{et } D_s = S_1 + S_2 = d - s - 9 + 18 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d - s - 9 + 18 \cdot \frac{10}{9} \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d - s - 9 + 20 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}.$$

$$D_s = d - s - 9 + 18 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d - s - 9 + 20 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$$

Problème 3, partie III : Optimisation

Remarque : On admet que pour $p \in]0; 1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Pour $p = \frac{1}{10}$, cela devient : $D_s = d - s + 1 - 10 + 20 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d - s - 9 + 20 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$: on retrouve le résultat de la partie précédente.

$$\begin{aligned}
\text{Q35. } D_{s+1} - D_s &= d - (s+1) + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1} - (d-s+1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}) \\
&= d - s - 1 + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s-1+1} - d + s - 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1} \\
&= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1 - (1-p)) = -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s} \cdot p = -1 + 2(1-p)^{d-s}
\end{aligned}$$

$$D_{s+1} - D_s = 2(1-p)^{d-s} - 1$$

$$\begin{aligned}
\text{Q36. } D_{s+1} - D_s \geq 0 &\Leftrightarrow (1-p)^{d-s} \geq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow (d-s) \ln(1-p) \geq -\ln(2) \text{ en composant par } \ln \text{ qui est croissante.} \\
&\Leftrightarrow d-s \leq \frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)} \text{ car } 1-p \in]0; 1[, \text{ donc } \ln(1-p) < 0. \\
&\Leftrightarrow s \geq d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \\
&\Leftrightarrow s \geq \alpha
\end{aligned}$$

s	α
signe de $D_{s+1} - D_s$	$\begin{array}{ccc} - & \emptyset & + \end{array}$

Si on note Ent la fonction partie entière,

◊ Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $D_{\alpha+1} - D_\alpha = 0 \Leftrightarrow D_{\alpha+1} = D_\alpha$: $D_{\alpha+1}$ est la valeur minimale de la suite et $\alpha + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à α .

◊ Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $D_{Ent(\alpha)+1} - D_{Ent(\alpha)} < 0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+1} < D_{Ent(\alpha)}$

et $D_{Ent(\alpha)+2} - D_{Ent(\alpha)+1} > 0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+2} > D_{Ent(\alpha)+1}$.

Le minimum de la suite $(D_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est atteint pour $s = Ent(\alpha) + 1$, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à α .

D_s est minimal lorsque s est le plus petit entier strictement supérieur à α .

$$\text{Q37. } \alpha = d + \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{9}{10})} = d + \frac{\ln(2)}{\ln(0.9)}.$$

$$2^{-1/6} < 0.9 < 2^{-1/7} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \ln(2) < \ln(0.9) < -\frac{1}{7} \ln(2) \text{ car } \ln \text{ est croissante.}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{\ln(2)} < \frac{1}{\ln(0.9)} < -\frac{6}{\ln(2)} \text{ par passage à l'inverse}$$

$$\Leftrightarrow -7 < \frac{\ln(2)}{\ln(0.9)} < -6 \text{ car } \ln(2) > 0$$

$$\Leftrightarrow d - 7 < \alpha < d - 6$$

On doit commencer à chercher une place 6 numéros avant l'arrivée (à $d - 6$) si $d \geq 6$,
et dès le numéro 0 sinon.

Q38. `def Bernoulli(q) :`
 `return(random( ) < q)`

`def distance(d,s,p) :`
 `X=s`
 `while(Bernoulli(1-p)) :`
 `X=X+1`
 `return(abs(X-d))`

remarque : “`while(Bernoulli(p)==0) :`” convient également

Rédigé par :

Nicolas MARTIN, TSI 2, Lycée Robert Doisneau, Corbeil-Essonnes

et

Frédérique EVRARD, TSI 2, Lycée Rouvière, Toulon.