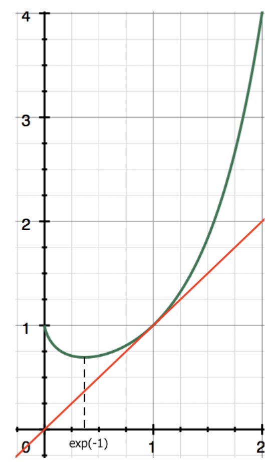
PROBLEME 1

Q1. $\boxed{g(1) = 1^1 = 1}$; $g(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$; la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc, par composition $\boxed{g \text{ est dérivable sur } I =]0,+\infty[}$

Q2. $g'(x) = \big(\ln(x)+1\big)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$; du signe de $\ln(x)+1$;
or $\ln(x)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Par prépondérance, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; par composition, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$; par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$g(\mathrm{e}^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Q3. L'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est donnée par $y = g'(1)(x-1) + g(1) = 1\times(x-1)+1$; soit $\boxed{y = x}$



Q4. Pour étudier la position entre la courbe et la tangente, on calcule
$g(x) - x \underset{x\to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big) - x \underset{x\to 1}{=} (x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big) \geqslant 0$
Donc au voisinage de 1, $\boxed{\text{la courbe de } g \text{ se situe au dessus de la tangente}}$

Q5. Voir ci-contre :

Q6. Tout d'abord, comme g est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
D'après la graphique, on constate que $\forall x \in]0,1]$, $g(\mathrm{e}^{-1}) \leqslant g(x) \leqslant 1$;
or $g(\mathrm{e}^{-1}) > \mathrm{e}^{-1}$; donc $\mathrm{e}^{-1} < g(x) \leqslant 1$; par intégration, il vient :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x < 1}$$

Q7. $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}}$

Q8. Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est prépondérante devant $x \mapsto \big(\ln(x)\big)^k$; donc $\lim\limits_{x\to 0} x^n\big(\ln(x)\big)^k = 0$; ainsi $\boxed{x \mapsto x^n\big(\ln(x)\big)^k \text{ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0}}$

Q9. Tout d'abord, d'après la question précédente la fonction $x \mapsto x^n\big(\ln(x)\big)^k$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale converge.

Ensuite, on pose $\begin{array}{lcl} u(x) = \ln(x)^k & \Rightarrow & u'(x) = \frac{k}{x}\ln(x)^{k-1} \\ v'(x) = x^n & \Rightarrow & v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{array}$; les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$
et $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+1}\big(\ln(x)\big)^k = 0$, donc, par IPP, on a :

$$\boxed{\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^k\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\big(\ln(x)\big)^k\right]_0^1}_{=0} - \frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^{k-1}\,\mathrm{d}x}$$

Q10. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_k$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$

Initialisation : Pour $k = 0$; $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \frac{1}{n+1}$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour une certaine valeur de k.
D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^k\,\mathrm{d}x$

Par hypothèse de récurrence, il vient : $\displaystyle\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^{k+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{k+1}{n+1}\times\frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}}$, ce qui prouve $\mathscr{P}_{k+1}$.

Conclusion : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, on a : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^k\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}}$

Lorsque $(n,k)=(0,0)$ alors $\displaystyle\int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$ et $\dfrac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} = 1$; donc la propriété est encore vraie.

Q11. $\boxed{\displaystyle \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} \text{ avec } R=+\infty}$

Q12. $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\big(x\ln(x)\big)^n}{n!}\right)\mathrm{d}x$ et, par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\boxed{\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{\big(x\ln(x)\big)^n}{n!}\,\mathrm{d}x}$$

Q13. D'après la question précédente : $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\big(x\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x$;

et d'après **Q10** on a : $\displaystyle\int_0^1\big(x\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\big(\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$; finalement :

$$\boxed{\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}}$$

Q14. La somme partielle $\displaystyle S_p = \sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ donnera l'approximation souhaitée lorsque $|R_p|\leqslant e$; par transitivité, il suffit d'avoir $\dfrac{1}{(p+2)^{p+2}}\leqslant e$.

```
def approximation(e):
    p=0
    somme=0
    while 1/(p+2)**(p+2)>e:
        somme+=(-1)**p/(p+1)**(p+1)
        p+=1
    return somme
```

On résout $\dfrac{1}{(p+2)^{p+2}}\leqslant\dfrac{1}{27} \Leftrightarrow p+2\geqslant 3 \Leftrightarrow p\geqslant 1$; donc S_1 donne l'approximation souhaitée :

$$\boxed{S_1 = \frac{(-1)^0}{(0+1)^{0+1}}+\frac{(-1)^1}{(1+1)^{1+1}} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$$

Q15. $f(x,y) = x^y - x = \mathrm{e}^{y\ln(x)} - x$; donc $\boxed{D_f =]0,+\infty[\times\mathbb{R}}$

Q16. Par composition, f admet des dérivées partielles suivant x et y sur D_f et $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)} - 1\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)}\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)}-1=0\\ \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)}=1\\ \ln(x)\underbrace{\mathrm{e}^{y\ln(x)}}_{\neq 0}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)}=1\\ \ln(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Donc : $\boxed{f \text{ admet un unique point critique dans } D_f \text{ de coordonnées } (1,1) \text{ et } f(1,1)=1^1-1=0}$

Q17. $f(1+h,1-h) = \mathrm{e}^{(1-h)\ln(1+h)} - (1+h) = \mathrm{e}^{(1-h)\left(h-\frac{h^2}{2}\right)} - 1 - h + o(h^2) = \mathrm{e}^{h-\frac{h^2}{2}-h^2} - 1 - h + o(h^2)$

$= \mathrm{e}^{h-\frac{3h^2}{2}} - 1 - h + o(h^2) = 1 + \left(h - \frac{3h^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(h - \frac{3h^2}{2}\right)^2 - 1 - h + o(h^2)$

$= 1 + h - \frac{3h^2}{2} + \frac{h^2}{2} - 1 - h + o(h^2) = \boxed{-h^2 + o(h^2)}$

Q18. D'une part, d'après la question précédente, on en déduit que $\underline{f(1+h,1-h) \leqslant 0}$ lorsque h est au voisinage de 0.

D'autre part, $f(1+h,1+h) = g(1+h) - (1+h)$; d'après **Q4**, en posant $x = 1+h$, on peut écrire : $g(1+h) = 1 + h + h^2 + o(h^2)$; donc $f(1+h,1+h) = 1 + h + h^2 - 1 - h + o(h^2) = h^2 + o(h^2)$ et ainsi, on peut dire que $\underline{f(1+h,1+h) \geqslant 0}$ lorsque h est au voisinage de 0.

Donc $\boxed{\text{le point critique de coordonnées } (1,1) \text{ n'est pas un extremum}}$

Q19. La nappe $z = f(x,y)$ peut être vue comme la surface implicite d'équation $f(x,y) - z = 0 \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0$ en posant $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. On sait alors que le plan tangent à la surface en $(1,1,0)$ admet le vecteur $\nabla F(1,1,0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0), \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0), \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\right) = (0,0,-1)$ comme vecteur normal.

$$\boxed{\text{Le plan tangent en } (1,1,0) \text{ a donc pour équation } z = 0}$$

On sait que le point $(1,1)$ n'est pas un extremum de f, donc le plan tangent traverse la surface.

PROBLEME 2

Q20. L'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de référence $\boxed{\text{convergente}}$ et valant 1.

Q21. La série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \mathrm{e}^{-p\pi} = \sum_{p\geqslant 0} \left(\mathrm{e}^{-\pi}\right)^p$ est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$ donc $\boxed{\text{converge}}$ et dont la somme vaut $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\pi} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}}$

Q22. On factorise par $\mathrm{e}^{i\theta}$: $1 - \mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\left(\mathrm{e}^{-i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}\right)$; d'après une formule d'Euler, on a : $\boxed{1 - \mathrm{e}^{2i\theta} = -2i\mathrm{e}^{i\theta}\sin(\theta)}$

Q23. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} \underset{k\leftarrow k+n}{=} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{2i(k-n)x} = \mathrm{e}^{-2inx} \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{2ikx} = \mathrm{e}^{-2inx} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{2ix}\right)^{2n+1}}{1 - \mathrm{e}^{2ix}} \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{e}^{-2inx} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{2i(2n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{2ix}}$

$\displaystyle\underset{\text{d'après } \mathbf{Q22}}{=} \mathrm{e}^{-2inx} \times \frac{-2i\mathrm{e}^{i(2n+1)x}\sin\big((2n+1)x\big)}{-2i\mathrm{e}^{ix}\sin(x)}$ donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}}$

Q24. $\displaystyle\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)} = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}$; donc, par inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\right| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \left|\mathrm{e}^{2ikx}\right| \underset{|\mathrm{e}^{i\theta}|=1}{\leqslant} 2n+1$

En multipliant par e^{-x} positif, il vient : $\boxed{\displaystyle\left|\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant (2n+1)\mathrm{e}^{-x}}$

Q25. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Au voisinage de 0 on a $\sin\big((2n+1)x\big) \sim (2n+1)x$ et $\sin(x) \sim x$ donc $f_n(x) \sim (2n+1)$; ainsi f_n est prolongeable par continuité en 0 donc I_n est faussement impropre en 0.

En $+\infty$: d'après la question précédente $|f_n(x)| \leqslant (2n+1)\mathrm{e}^{-x}$; or $\displaystyle\int_0^{+\infty} (2n+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (2n+1)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc, par comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente (on dit que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$) et par suite $\boxed{I_n \text{ est convergente}}$

$I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \underset{\text{d'après } \mathbf{Q23}}{=} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}\right) \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$; par la relation de Chasles il vient :

$$\boxed{I_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}\right) \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x}$$

Q26. *Remarque :* Avec la définition donnée dans l'énoncé, $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{d}t$ ne correspond pas à la valeur moyenne de la fonction f.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$;

$a_k(f)+a_{-k}(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\, \mathrm{d}t + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(-kt)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\, \mathrm{d}t + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\, \mathrm{d}t.$

$$\boxed{a_k(f) + a_{-k}(f) = 2a_f(f)}$$

$b_k(f)+b_{-k}(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\, \mathrm{d}t + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(-kt)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\, \mathrm{d}t - \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\, \mathrm{d}t.$

$$\boxed{b_k(f) + b_{-k}(f) = 0}$$

Q27. On rappelle que $I_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}\right) \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$; on pose $t = 2x - 2p\pi \Leftrightarrow x = \frac{t+2p\pi}{2} = \varphi(t)$

L'application φ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, \mathrm{d}t$: par changement de variable, on a :

$I_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ik\frac{t+2p\pi}{2}}\right) \mathrm{e}^{-\frac{t+2p\pi}{2}} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{i(kt+2kp\pi)} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}-p\pi}\right) \mathrm{d}t$;

or $e^{i(kt+2kp\pi)} = \mathrm{e}^{ikt}$; donc : $\boxed{I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}-p\pi}\, \mathrm{d}t\right)}$

Q28. $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \big(\cos(kt) + i\sin(kt)\big) f(t)\, \mathrm{d}t\right) \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\pi}$

$\underset{\text{d'après } \mathbf{Q21}}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \big(\cos(kt)f(t) + i\sin(kt)f(t)\big)\, \mathrm{d}t \times \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)f(t)\, \mathrm{d}t + i\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)f(t)\, \mathrm{d}t\right)$; d'où

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \sum_{k=-n}^{n} a_k(f) + ib_k(f)}$$

Q29. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k(f) = a_0(f) + \sum_{k=-n}^{-1} a_k(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \underset{\ell=-k}{=} a_0(f) + \sum_{\ell=n}^{1} a_{-\ell}(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)$

$\underset{\text{commutativité}}{=} a_0(f) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{-\ell}(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_{-k}(f) + a_k(f) \underset{\text{d'après } \mathbf{Q26}}{=} a_0(f) + 2\sum_{k=1}^{n} a_k(f)$

De la même façon, on démontre que $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} ib_k(f) = 0.$

Donc $I_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \left(a_0(f) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\right)$; soit $\boxed{I_n = \dfrac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \left(\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\right)}$

Q30. La fonction f est 2π−périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point vers la régularisée de f, définie par $\tilde{f}(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}$

En $t=0$; $\lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 1$ et $\lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 2\pi^-} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \mathrm{e}^{-\pi}$;
donc $\tilde{f}(0) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.
Or la série de Fourier de f est définie par : $S(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)$;
soit : $S(0) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)$;
or $I_n = \dfrac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} S_n(f)$, où $S_n(f)$ est la somme partielle de la série de Fourier de f ; on en déduit donc que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \times \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}}$$

PROBLEME 3

Q31. $\boxed{R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$

Q32. Par définition, $f_\theta(x,y) = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; soit $\boxed{f_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}}$

Q33. Par définition, l'affixe de $f_\theta(x,y)$ est : $\big(x\cos\theta - y\sin\theta\big) + i\big(x\sin\theta + y\cos\theta\big)$; or
$\big(x\cos\theta - y\sin\theta\big) + i\big(x\sin\theta + y\cos\theta\big) = x\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) + iy\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \boxed{\mathrm{e}^{i\theta}(x+iy)}$

Q34. Tout d'abord, une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss permet d'affirmer que l'équation complexe $z^n - 1 = 0$ admet n racines (en tenant compte des mutiplicités).
Ensuite, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$; $(\omega_k)^n = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{e}^{i2k\pi} = 1$; donc ω_k est racine de l'équation $z^n - 1 = 0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\boxed{\text{Les racines } n\text{−ième de l'unité sont bien } \{\omega_k,\ \text{pour } k \in [\![0, n-1]\!]\}}$

Q35. $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{(2k+2)\pi}{n}}$ on a bien : $\boxed{r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}}$

Q36. Pour $n=4$; $\boxed{\omega_0 = \mathrm{e}^{i\frac{2\times 0\times\pi}{4}} = 1 \ ; \ \omega_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\times 1\times\pi}{4}} = i \ ; \ \omega_2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\times 2\times\pi}{4}} = -1 \ ; \ \omega_3 = \mathrm{e}^{i\frac{2\times 3\times\pi}{4}} = -i}$

Q37. L'affixe A_{n+1} est obtenue à partir de l'affixe A_n, soit par une rotation dans le sens trigonométrique d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, dans ce cas $A_{n+1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}A_n$; soit par une rotation dans le sens horaire d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et dans ce cas $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}A_n$; or la variable aléatoire D_n vaut 1 si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et vaut -1 si elle s'effectue dans le sens inverse, donc $\boxed{A_{n+1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n}$

Q38. Les événement $\big\{(A_n=1), (A_n=i), (A_n=-1), (A_n=-i)\big\}$ forment un système complet d'événement, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(A_{n+1}=1) = P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=1)\big) + P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=i)\big) + P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=-1)\big) + P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=-i)\big)$
L'événement $\big(A_{n+1}=1\big)$ n'est réalisable que si $\big(A_n=i\big)$ ou $\big(A_n=-i\big)$, donc $P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=1)\big) = 0$ et $P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=-1)\big) = 0$; il reste :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}=1) &= P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=i)\big) + P\big((A_{n+1}=1)\cap(A_n=-i)\big) \\ &= P(A_n=i)P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=1) + P(A_n=-i)P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=1) \end{aligned}$$

or l'aiguille se déplace dans le sens trigonométrique ou le sens inverse avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ donc :
$P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=1) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=1) = \dfrac{1}{2}$; on a bien : $\boxed{P(A_{n+1}=1) = \frac{1}{2}P(A_n=i) + \frac{1}{2}P(A_n=-i)}$

Q39. De même, on a : $\boxed{\begin{array}{l} P(A_{n+1}=i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1) \\ P(A_{n+1}=-1)=\frac{1}{2}P(A_n=i)+\frac{1}{2}P(A_n=-i) \\ P(A_{n+1}=-i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1) \end{array}}$

Q40. La matrice M est symétrique réelle donc $\boxed{\text{est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$

Q41. La matrice M possède deux colonnes identiques, donc pas définition son déterminant est nul et donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

Q42. $M(1,-1,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1,-1,1,-1) = -1\cdot(1,-1,1,-1)$; on en déduit que

$$\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } M \text{ associée au vecteur propre } (1,-1,1,-1)}$$

Q43. $M(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1,1,1,1) = 1\cdot(1,1,1,1)$; on en déduit que

$$\boxed{\text{le vecteur } (1,1,1,1) \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$$

Q44. On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\,(Me_1, Me_2, Me_3, Me_4)$; soit

$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; une base de $\mathrm{Im}(M)$ est donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) + \dim(\mathrm{Im}(M))$;

on vient de montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, on en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$.

$\mathrm{Ker}(M)$ est un sous-espace propre de M de dimension 2; de plus 1 et -1 sont des valeurs propres de M donc les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont de dimension au moins égale à 1. On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 4, la dimension de $\mathbb{R}^4$ et on retrouve ainsi le fait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q45. Si $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n=1) \\ P(A_n=i) \\ P(A_n=-1) \\ P(A_n=-i) \end{pmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1}=1) \\ P(A_{n+1}=i) \\ P(A_{n+1}=-1) \\ P(A_{n+1}=-i) \end{pmatrix}$.

Les résultats des questions **Q38** et **Q39** permettent d'écrire : $U_{n+1} = MU_n$; on démontrerait par récurrence que $U_n = M^n U_0$. Un calcul de M^n en utilisant la relation $M^n = PD^nP^{-1}$, avec P la matrice constituée des vecteurs propres et $D = \mathrm{diag}(0,0,1,-1)$, nous donnerait le vecteur U_n.

Q46. Si X suit une loi de Rademacher, alors $X(\Omega) = \{-1,1\}$; en particulier X admet un nombre fini de valeurs (2 valeurs exactement) donc $\boxed{X \in V_f(\Omega)}$

Par définition, $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = (-1)\times P(X=-1) + 1\times P(X=1) = (-1)\times\dfrac{1}{2} + 1\times\dfrac{1}{2}$; soit $\boxed{E(X)=0}$

Q47.
- La variable nulle suit une loi certaine et admet une seule valeur, 0, donc la variable nulle appartient à $V_f(\Omega)$.
- Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors la variable $\lambda X_1 + X_2$ prend un nombre fini de valeurs et ainsi $\lambda X_1 + X_2 \in V_f(\Omega)$

On a montré que $\boxed{V_f(\Omega) \text{ est un } \mathbb{R}\text{−espace vectoriel}}$

Q48.
- *Symétrie :* $\Phi(Y,X) = E(YX) = E(XY) = \Phi(X,Y)$; donc Φ est symétrique.
- *Bilinéarité :* Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$;
$\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = E\big((\lambda X_1 + X_2)Y\big) = E\big(\lambda X_1 Y + X_2 Y\big) = \lambda E(X_1 Y) + E(X_2 Y)$ par linéarité de l'espérance ; donc $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = \lambda\Phi(X_1, Y) + \Phi(X_2, Y)$; ainsi Φ est linéaire à gauche, et par symétrie, on en déduit que Φ est bilinéaire.
- *Positivité :* $\Phi(X,X) = E(X^2) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x)$; avec $P(X=x) \in [0,1]$ et $x^2 \geqslant 0$;
on en déduit $\Phi(X,X) \geqslant 0$ et Φ est positive.
- *Définie-Positivité :* $\Phi(X,X) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = 0$; or une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement chaque terme est nul ; donc $\forall x \in X(\Omega)$, $x^2 P(X=x) = 0$; alors, soit $P(X=x) = 0$ et alors l'événement $(X=x)$ est impossible ; soit $x = 0$. Finalement la seule valeur possible pour X est 0 et ainsi X est la variable nulle.

Φ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive ; donc $\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } V_f(\Omega)}$

Q49.
- Soit $i \in [\![1,n]\!]$; $\|X_i\|^2 = \Phi(X_i, X_i) = E(X_i^2) = \displaystyle\sum_{x\in X_i(\Omega)} x^2 P(X_i = x)$; or X_i suit une loi de Rademacher, donc
$\|X_i\|^2 = (-1)^2 \times \dfrac{1}{2} + (1)^2 \times \dfrac{1}{2}$; on a bien $\|X_i\| = 1$.
- Soit $i \neq j$, $\Phi(X_i, X_j) = E(X_i X_j) = \displaystyle\sum_{x_i\in X_i(\Omega)}\sum_{x_j\in X_j(\Omega)} x_i x_j P\big((X_i = x_i)\cap(X_j = x_j)\big)$; X_i et X_j suivent des lois de Rademacher, donc :

$$\begin{aligned}\Phi(X_i, X_j) = {} & (-1)\times(-1)P\big((X_i=-1)\cap(X_j=-1)\big) + (-1)\times(1)P\big((X_i=-1)\cap(X_j=1)\big)\\ & + (1)\times(-1)P\big((X_i=1)\cap(X_j=-1)\big) + (1)\times(1)P\big((X_i=1)\cap(X_j=1)\big);\end{aligned}$$

de plus X_i et X_j sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned}\Phi(X_i, X_j) = {} & (-1)\times(-1)P(X_i=-1)\times P(X_j=-1) + (-1)\times(1)P(X_i=-1)\times P(X_j=1)\\ & + (1)\times(-1)P(X_i=1)\times P(X_j=-1) + (1)\times(1)P(X_i=1)\times P(X_j=1);\end{aligned}$$

$$\Phi(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Les $\big(X_i\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, donc :

$$\boxed{\big(X_1, \ldots, X_n\big) \text{ est une famille orthogonale de } V_f(\Omega) \text{ pour le produit scalaire } \Phi}$$

Q50. $F = \mathrm{Vect}\big(X_1, \ldots, X_n\big)$; la famille génératrice de F est une famille orthonormale, donc est également une famille libre ; ainsi cette famille est une base de F et donc $\boxed{\dim(F) = n}$

Q51. Soit $X \in V_f(\Omega)$, indépendante des $\big(X_i\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$; $\Phi(X, X_i) = E(XX_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{x_i\in\{-1,1\}} x x_i P\big((X=x)\cap(X_i=x_i)\big)$; soit

$\Phi(X, X_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\times(-1)P\big((X=x)\cap(X_i=-1)\big) + \sum_{x\in X(\Omega)} x\times(1)P\big((X=x)\cap(X_i=1)\big)$; et par indépendance :

$$\begin{aligned} &= -\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\times P(X_i=-1) + \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\times P(X_i=1)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = -\frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X)\end{aligned}$$

ce qui donne : $\Phi(X, X_i) = 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$; ce qui signifie que $\boxed{X \in F^{\perp}}$

Q52. Tout d'abord, $X_i \in \{-1,1\}$; donc $X_i + 1 \in \{0,2\}$ et $\frac{X_i+1}{2} \in \{0,1\}$;
de plus $P\left(\frac{X_i+1}{2} = 0\right) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ et $P\left(\frac{X_i+1}{2} = 1\right) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$;
donc la variable $\frac{X_i+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Ainsi X est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli, d'après le cours :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}}$$

Par définition, $d(X,F) = \|X - p_F(X)\|$, où $p_F(X)$ est le projeté orthogonal de X sur F défini par :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(X, X_i) X_i$$

or $\Phi(X,X_i) = E\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \dfrac{X_j+1}{2}\right) X_i\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j X_i + X_i\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} E(X_j X_i) + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=0}$

si $i \neq j$, $E(X_j X_i) = 0$ et si $i = j$, $E(X_i^2) = 1$; donc $\Phi(X,X_i) = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{p_F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Première méthode plus longue, mais utilisant des résultats intéressants :

D'après le théorème de Pythagore : $\|X\|^2 = \|p_F(X)\|^2 + \|X - p_F(X)\|^2$; soit $\|X - p_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_F(X)\|^2$
$\|X\|^2 = \Phi(X,X) = E(X^2) = V(X) + \left(E(X)\right)^2$, où V est la variance de X. (On rappelle la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$) On a démontré que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc $E(X) = np = \frac{n}{2}$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$ et ainsi $\|X\|^2 = \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2+n}{4}$.

Dans la base **orthonormale** $\{X_1, ..., X_n\}$ de F, la variable $p_F(X)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$;
donc $\|p_F(X)\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}$.

Finalement : $\|X - p_F(X)\|^2 = \dfrac{n^2+n}{4} - \dfrac{n}{4} = \dfrac{n^2}{4}$ et donc : $\boxed{d(X,F) = \dfrac{n}{2}}$

Deuxième méthode plus courte :

On sait que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2}$ et $p_F(X) = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i$; donc $X - p_F(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ et $Y = X - p_F(X)$ est une variable qui suit une loi certaine de valeur $\frac{n}{2}$.

$\|Y\|^2 = \Phi(Y,Y) = E(Y^2) = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 \times P\left(Y = \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n^2}{4} \times 1$ et ainsi $\|Y\| = \dfrac{n}{2}$. On retrouve : $\boxed{d(X,F) = \dfrac{n}{2}}$