CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.
Le problème 1 est composé de trois parties et les problèmes 2 et 3 de deux parties.

PROBLÈME 1

On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
On considère la fonction $g : x \longmapsto x^x$ et on pose $I =]0, +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

Q1. Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I.

Q2. Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I.

Q3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g.

Q4. On admet que $g(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\Big((x-1)^2\Big)$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g.

Q5. Représenter sur l'intervalle $]0, 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$ et $g(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0,69$.

Q6. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $\mathrm{e}^{-1} < \displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1$.

Partie II - Une approximation plus précise de $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$

II.1 - Un calcul d'intégrales

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

Q8. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \longmapsto x^n \ln(x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.

Q9. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{k-1} \,\mathrm{d}x.$$

Q10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n, k) = (0, 0)$.

II.2 - Expression de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ à l'aide d'une série

Q11. Rappeler le développement en série entière de $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ ainsi que son rayon de convergence.

Q12. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln(x))^n}{n!} \mathrm{d}x$.

Q13. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q14. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ et on admet l'inégalité $|R_p| \leq \dfrac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

Dans le langage Python, écrire une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif `e` et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ dont l'erreur maximale commise est `e`.

Donner ensuite une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$ à $\dfrac{1}{27}$ près.

Partie III - Étude du point critique de la surface $z = x^y - x$

Dans cette partie, on suppose l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct. Soit f la fonction de deux variables définie par $f : (x, y) \longmapsto x^y - x$.

Q15. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et le représenter dans le plan.

Q16. Montrer que f admet un et un seul point critique dans D_f et vérifier que la valeur de f en ce point critique vaut 0.

Q17. Montrer que :

$$f(1+h, 1-h) \underset{h\to 0}{=} -h^2 + o(h^2).$$

Q18. À l'aide des **questions Q4 et Q17**, justifier que le point critique n'est pas un extremum.

Q19. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(1, 1, 0)$. Que peut-on affirmer sur la position relative de ce plan tangent à la surface ?

PROBLÈME 2
Calcul d'une limite à l'aide d'une série de Fourier

Pour n un entier naturel, on s'intéresse à l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

Partie I - Existence des I_n et réécriture

Q20. Déterminer la nature de $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

Q21. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p \geq 0} \mathrm{e}^{-p\pi}$ converge et préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\pi}$.

Q22. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer l'égalité $1 - \mathrm{e}^{i2\theta} = -2i\mathrm{e}^{i\theta} \sin(\theta)$.

Q23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}.$$

On pourra effectuer le changement d'indice $k \leftarrow k + n$.

Q24. En déduire que, pour tout réel x positif, on a :

$$\left| \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \mathrm{e}^{-x} \right| \leq (2n+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Q25. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge, puis justifier que l'on peut écrire :

$$I_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} \right) \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

Partie II - Étude de la convergence de (I_n)

On considère f la fonction définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}.$$

On note encore f son prolongement 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et on considère les coefficients de Fourier de f définis par :

- pour $k \in \mathbb{Z}$, $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, \mathrm{d}t$;
- pour $k \in \mathbb{Z}$, $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t$.

Q26. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $a_k(f) + a_{-k}(f)$ en fonction de $a_k(f)$ et calculer $b_k(f) + b_{-k}(f)$.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du changement de variables $t = 2x - 2p\pi$, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2} - p\pi}\, \mathrm{d}t \right).$$

Q28. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la **question Q21**, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{\pi}{1 - \mathrm{e}^{-\pi}} \sum_{k=-n}^{n} a_k(f) + i\, b_k(f).$$

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la **question Q26**, montrer que :

$$I_n = \frac{\pi}{1 - \mathrm{e}^{-\pi}} \left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \right).$$

Q30. En appliquant le théorème de Dirichlet à f évaluée en 0, montrer enfin que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

PROBLÈME 3
Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P). Pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.

On dit qu'une variable aléatoire X sur (Ω, P) suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad P(X = -1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Partie I - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1 - Rotations du plan

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Q31. Donner la matrice de rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'angle θ.

On note f_θ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à cette matrice de rotation.

Q32. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy$ dans $\mathbb{C}$.

Q33. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta} z \qquad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

I.2 - Racines n−ièmes de l'unité

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n−ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$.

Q34. Montrer que $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ sont précisément les racines n−ièmes de l'unité.

Q35. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$.

Q36. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ω_3.

I.3 - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, i, -1, -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}D_n} A_n$.

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\}$ est un système complet d'événements de Ω, justifier que :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i).$$

Q39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = i)$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -i)$.

On note la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Q40. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q41. La matrice M est-elle inversible ?

Q42. Montrer que -1 est valeur propre de M.

Q43. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Q44. Déterminer une base de l'image de M et retrouver le fait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ grâce aux dimensions des sous-espaces propres.

Q45. Soit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$. On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Expliquer la démarche, sans mener les calculs, pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = i)$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -i)$.

Partie II - Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X(\Omega) \text{ est fini}\}.$$

Q46. Montrer que si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et montrer que $E(X) = 0$.

Q47. Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$−espace vectoriel.

On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par :

$$\Phi(X, Y) = E(XY)$$

où E désigne l'espérance et (X, Y) est un couple dans $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$.

Q48. Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

II.2 - Orthonormalité et projection

On considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

Q49. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ .

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$.

Q50. Déterminer la dimension de F.

Q51. Montrer que si $X \in V_f(\Omega)$ est indépendante de chacune des variables $X_1, \dots, X_n$, alors $X \in F^\perp$ où $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F pour le produit scalaire Φ.

Q52. Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$. Déterminer la loi de X puis la distance de X à F.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1174 – D'après documents fournis